A Weighted Linear Matroid Parity Algorithm

joint work with 岩田 覚 （東京大学）

小林 佑輔

筑波大学

ERATO 感謝祭　　August 3, 2017

はじめに

STOC

- Annual ACM Symposium on the Theory of Computing
- 理論計算機科学のトップ会議（他に FOCS, SODA などが有名）
- 採択率 25% 程度，100件弱採択

STOC HP （http://acm-stoc.org/stoc2017/）

STOC 2017 Theory Fest: 49th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing June 19-23, 2017 in Montreal

SIGACT

acm

General Information

- Home
- Call for Papers
- Call for Workshop Proposals
- Call for Suggestions for Invited Paper Talks
- Call for Posters

Theory Fest Program

- Overview Grid
- Accepted Papers
- STOC Program
- Keynote Speakers

News

The full STOC Program and the schedule of invited paper talks are posted.

Conference Registration is open.

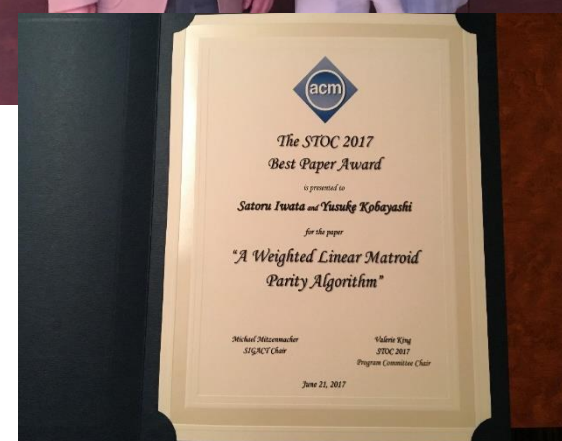
A Call for Posters is posted.

The TheoryFest/STOC Schedule , Tutorials and Workshops schedules are posted.

The STOC Accepted Papers list is available

General Information

The 49th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2017) is sponsored by the ACM Special Interest Group



STOC Best Paper 受賞

主結果

重み付き線形マトロイドパリティ問題 に対して

初の多項式時間アルゴリズムを与えた

多項式時間アルゴリズム

計算時間が入力サイズの多項式で
抑えられるアルゴリズム

≈ （理論的に）効率の良いアルゴリズム

多項式時間アルゴリズムあり

- 最短路問題
- マッチング問題
- 最大流問題
- 最小カット問題
- 最小費用流問題　etc.

P

多項式時間アルゴリズム無し（と思われている）

- SAT問題
- 巡回セールスマン問題
- 点彩色問題
- 最大カット問題
- 最大クリーク問題　etc.

NP-hard

多項式時間アルゴリズム

計算時間が入力サイズの多項式で
抑えられるアルゴリズム

≈ （理論的に）効率の良いアルゴリズム

（P≠NP を想定して）
多項式時間で解ける問題の限界は？

- 最大流問題
- 最小カット問題
- 最小費用流問題　etc.

P

- 点彩色問題
- 最大カット問題
- 最大クリーク問題　etc.

NP-hard

重み付き線形マトロイドパリティ

主結果

重み付き線形マトロイドパリティ問題 に対して

初の多項式時間アルゴリズムを与えた

重み付き線形マトロイドパリティ問題 とは．．．？

- 重み付き線形マトロイドマッチング問題とも呼ばれる
- 重み付き2部グラフマッチングの 一般化の一般化
- 30年以上多項式時間可解性が未解決だった

線形マトロイドパリティ問題

線形マトロイドパリティ

重み無し：Lovász (1978)

重み付き：Iwata-Kobayashi (2017+), Pap (??)

一般グラフのマッチング

重み無し：Edmonds (1965)

重み付き：Edmonds (1965)

（線形）マトロイド交叉

重み無し：Edmonds (1968)

重み付き：Lawler (1975)
Iri-Tomizawa (1976)
Edmonds (1979)

2部グラフのマッチング

重み無し：van der Waerden (1927), Kőnig (1931)

重み付き： Egerváry (1931), Kuhn (1955)

線形マトロイドパリティ問題

線形マトロイドパリティ

重み無し：Lovász (1978)

重み付き：Iwata-Kobayashi (2017+), Pap (??)

一般グラフのマッチング

重み無し：Edmonds (1965)

重み付き：Edmonds (1965)

（線形）マトロイド交叉

重み無し：Edmonds (1968)

重み付き：Lawler (1975)
Iri-Tomizawa (1976)
Edmonds (1979)

2部グラフのマッチング

重み無し：van der Waerden (1927), Kőnig (1931)

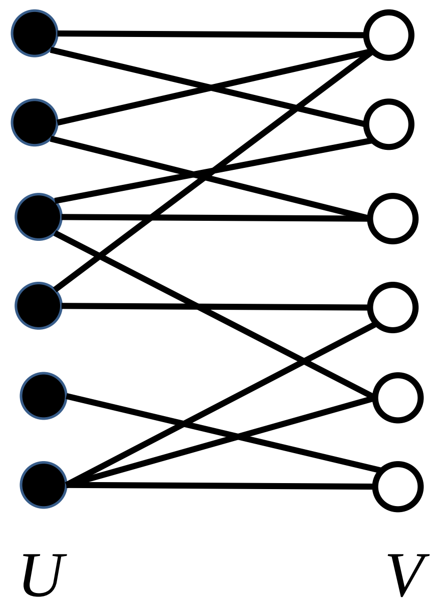
重み付き： Egerváry (1931), Kuhn (1955)

２部グラフのマッチング

入力:　２部グラフ $G=(U, V; E)$

問題:　最大サイズのマッチングは？

１本以下の枝が接続

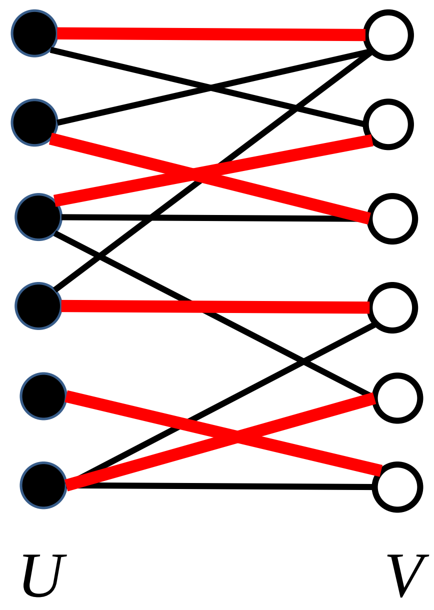


２部グラフのマッチング

入力:　２部グラフ $G=(U, V; E)$

問題:　最大サイズのマッチングは？

１本以下の枝が接続

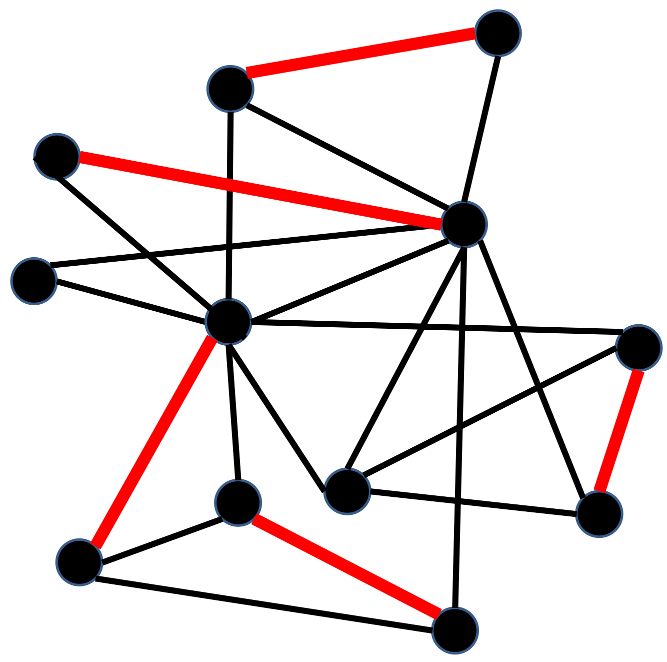


一般グラフのマッチング

入力： グラフ $G=(V, E)$

問題： 最大サイズのマッチングは？

1本以下の枝が接続



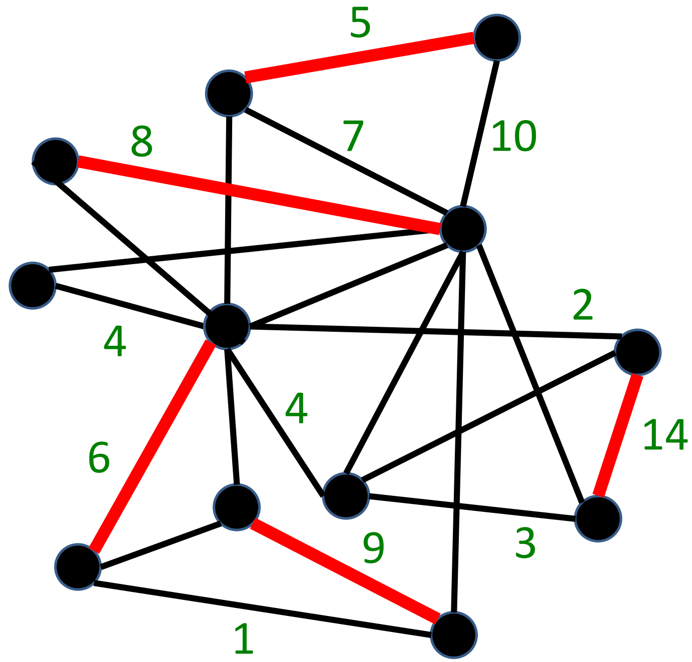
グラフのマッチング（重み付き）

入力：　グラフ $G=(V, E)$，枝重み $w(e)$

問題：　最大重みのマッチングは？

　　　　最小重みの完全マッチングは？

2つは本質的に等価



線形マトロイドパリティ問題

線形マトロイドパリティ

重み無し：Lovász (1978)

重み付き：Iwata-Kobayashi (2017+), Pap (??)

一般グラフのマッチング

重み無し：Edmonds (1965)

重み付き：Edmonds (1965)

（線形）マトロイド交叉

重み無し：Edmonds (1968)

重み付き：Lawler (1975)
Iri-Tomizawa (1976)
Edmonds (1979)

2部グラフのマッチング

重み無し：van der Waerden (1927), Kőnig (1931)

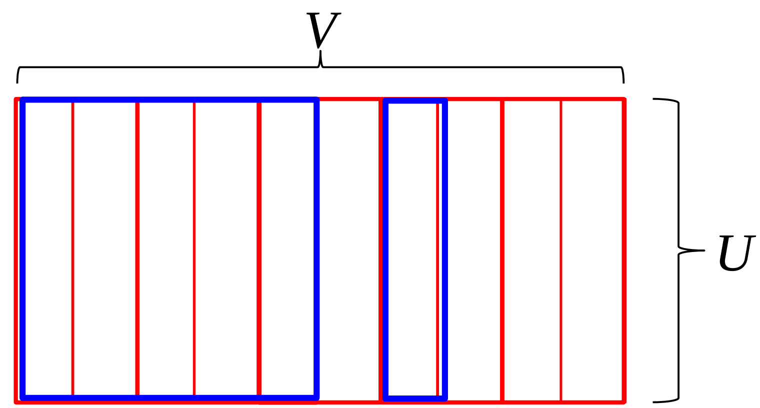
重み付き： Egerváry (1931), Kuhn (1955)

線形マトロイド交叉

- 線形マトロイド → ここでは単に「行列」と思って十分

入力：

$$A_1 = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{V} \Big\} U$$

$A_2 =$ 

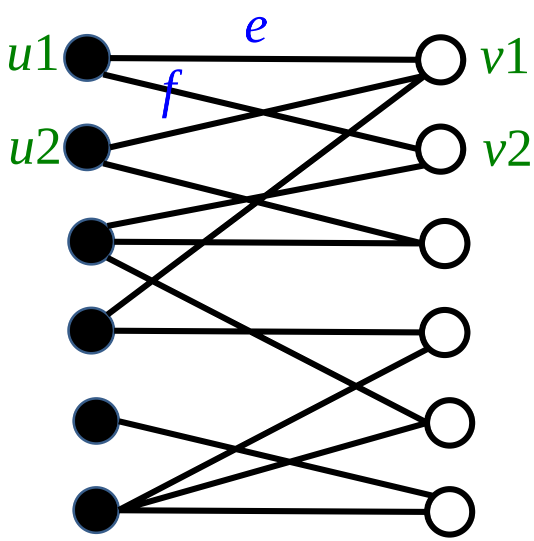
共通独立集合 : 列ベクトルの集合がどちらでも一次独立

共通基 B : $A_1[B, U]$ も $A_2[B, U]$ も正則

問題： 最大の共通独立集合は？

最小重みの 共通基 B は？ （重み $w: V \to \mathbf{R}$）

2部マッチング → 線形マトロイド交叉



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} e & f & & & & & & & & \end{array} \\
A_1 = \begin{array}{c} u1 \\ u2 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} e & f & & & & & & & & \end{array} \\
A_2 = \begin{array}{c} v1 \\ v2 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{array}\right]
\end{array}
$$

マッチング ⟺ 共通独立集合

完全マッチング ⟺ 共通基

線形マトロイドパリティ問題

線形マトロイドパリティ

重み無し：Lovász (1978)

重み付き：Iwata-Kobayashi (2017+), Pap (??)

一般グラフのマッチング

重み無し：Edmonds (1965)

重み付き：Edmonds (1965)

（線形）マトロイド交叉

重み無し：Edmonds (1968)

重み付き：Lawler (1975)
Iri-Tomizawa (1976)
Edmonds (1979)

2部グラフのマッチング

重み無し：van der Waerden (1927), Kőnig (1931)

重み付き： Egerváry (1931), Kuhn (1955)

線形マトロイドパリティ (or Matroid matching or Matchoid)

入力：

$$A = \overbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}^{V} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} U$$

ライン $l = \{u, \bar{u}\} \in L$

パリティ集合: ラインの和集合

問題： 最大サイズの 独立パリティ集合

線形マトロイドパリティ (or Matroid matching or Matchoid)

入力：

$$A = \left.\overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}}^{V}\right\}U$$

ライン $l = \{u, \bar{u}\} \in L$

パリティ集合: ラインの和集合

問題： 最大サイズの 独立パリティ集合

重み付き線形マトロイドパリティ

入力：

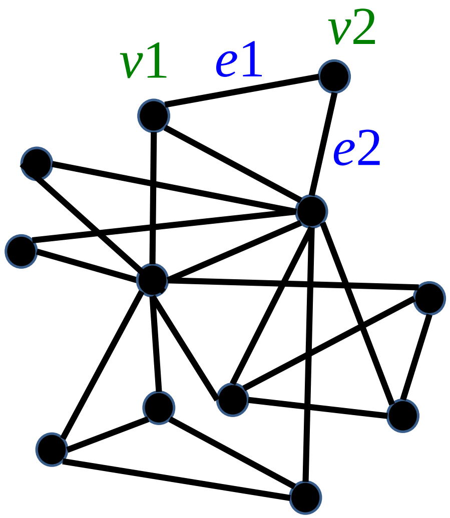
$$A = \overbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]}^{V} \Bigg\} U$$

ライン $l = \{u, \bar{u}\} \in L$

パリティ基: パリティ集合 & 基

問題： 最小重みの パリティ基　　（重み $w: L \to \mathbf{R}$）

マッチング → 線形マトロイドパリティ



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} e1 & & e2 & & & & & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} v1 \\ v2 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & A = \begin{array}{|cc|cc|cc|cc|cc|}
1 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & &
\end{array}
\end{array}
$$

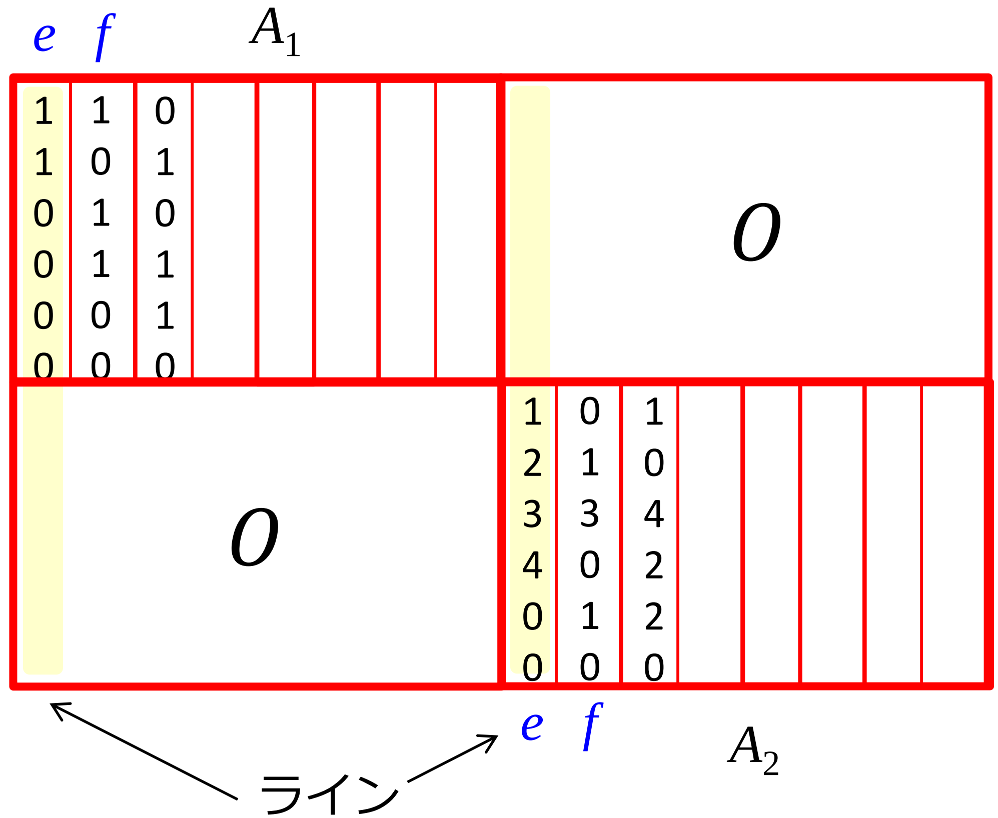
マッチング ⟺ 独立パリティ集合

完全マッチング ⟺ パリティ基

線形マトロイド交叉 → 線形マトロイドパリティ

$$
A_1 = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cccccccc}
e & f & & & & & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & & & & & \\
1 & 0 & 1 & & & & & \\
0 & 1 & 0 & & & & & \\
0 & 1 & 1 & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & & &
\end{array}
$$

$$
A_2 = \begin{array}{cccccccc}
e & f & & & & & & \\
\hline
1 & 0 & 1 & & & & & \\
2 & 1 & 0 & & & & & \\
3 & 3 & 4 & & & & & \\
4 & 0 & 2 & & & & & \\
0 & 1 & 2 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & & &
\end{array}
$$



共通独立集合 ⟺ 独立パリティ集合

共通基 ⟺ パリティ基

線形マトロイドパリティ問題

線形マトロイドパリティ

重み無し：Lovász (1978)

重み付き：Iwata-Kobayashi (2017+), Pap (??)

一般グラフのマッチング

重み無し：Edmonds (1965)

重み付き：Edmonds (1965)

（線形）マトロイド交叉

重み無し：Edmonds (1968)

重み付き：Lawler (1975)
Iri-Tomizawa (1976)
Edmonds (1979)

2部グラフのマッチング

重み無し：van der Waerden (1927), Kőnig (1931)

重み付き： Egerváry (1931), Kuhn (1955)

応用

- （重み無し）線形マトロイドパリティ
  - Structural solvability analysis of electric networks — Milić (1974)
  - Pinning down planar skeleton structures — Lovász (1980)
  - Feedback vertex set in subcubic graphs — Ueno, Kajitani, and Gotoh (1988)
  - Maximum genus cellular embedding — Furst, Gross, McGeoch (1988)
  - Maximum number of disjoint S-paths — Lovász (1980), Schrijver (2003)
- 重み付き線形マトロイドパリティ
  - Approximation algorithm for Steiner Tree — Prömel & Steger (2000)
  - Weighted disjoint S-paths — Yamaguchi (2016)
  - Weighted Feedback vertex set in subcubic graphs — Kobayashi & Yamaguchi (2017)

アルゴリズム

既存アルゴリズム

$|V|=n, \ |U|=m$

➢ （重み無し）線形マトロイドパリティ

Authors	Running time		
Lovász (1978)	Polynomial		
Gabow & Stallmann (1986)	$O(nm^3)$	$(\text{or } O(nm^{2.38}))$	
Orlin & Vande Vate (1990)	$O(nm^4)$	$(\text{or } O(nm^{3.38}))$	
Orlin (2008)	$O(nm^3)$	$(\text{or } O(nm^{2.38}))$	
Cheung, Lau, Leung (2011)	$O(nm^2)$	$(\text{or } O(nm^{1.38}))$	← 乱択

➢ 重み付き線形マトロイドパリティ

- Camerini, Galbiati, and Maffioli (1992)
- Cheung, Lau, and Leung (2014)

乱択・擬多項式

本研究の方針・ポイント

- アルゴリズム
  - 増加道アルゴリズム
    (重み無し版に対する Gabow and Stallmann のアルゴリズムを元に)
  - “主双対アプローチ”

注意: 明示的な LP 表現は与えていない

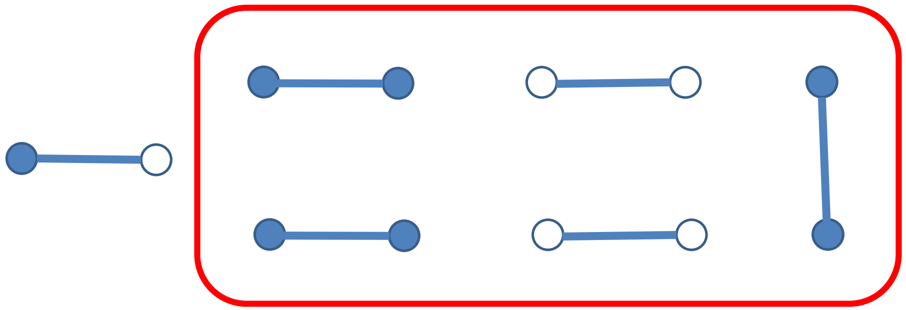
- 最適性の保証
  - “双対変数”の性質
  - 多項式行列の Pfaffian を用いた定式化
  - 組合せ緩和の思想　Murota (1990)

双対変数 （概略）

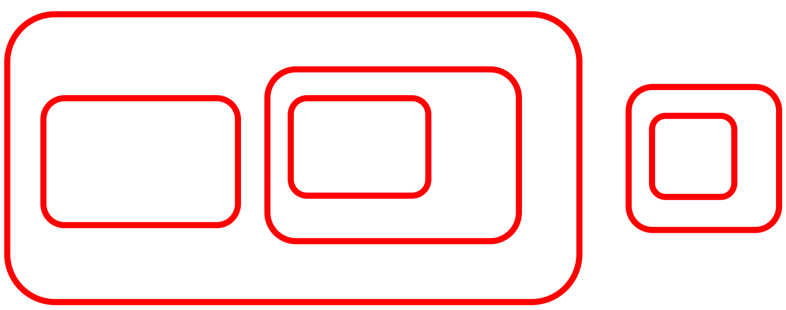
- Laminar family of blossoms

$$\Lambda = \{H_1, H_2, \ldots, H_\lambda\}$$

- 双対変数
  - $p: V \to \mathbf{R}$
  - $q: \Lambda \to \mathbf{R}_+$



Blossom



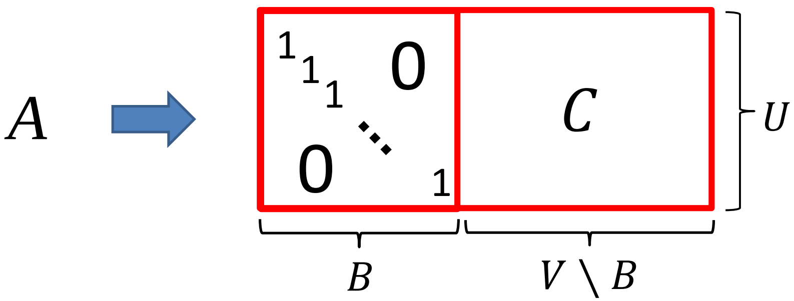
Laminar family

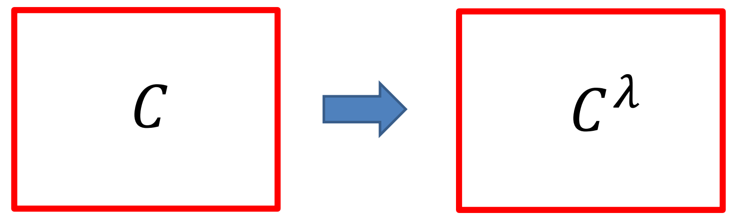
双対変数 （概略）

- Laminar family of blossoms

$$\Lambda = \{H_1, H_2, \dots, H_\lambda\}$$

- 双対変数
  - $p: V \to \mathbf{R}$
  - $q: \Lambda \to \mathbf{R}_+$



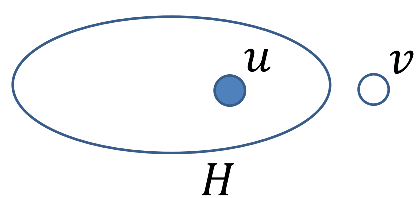


Λで定義される基本変形

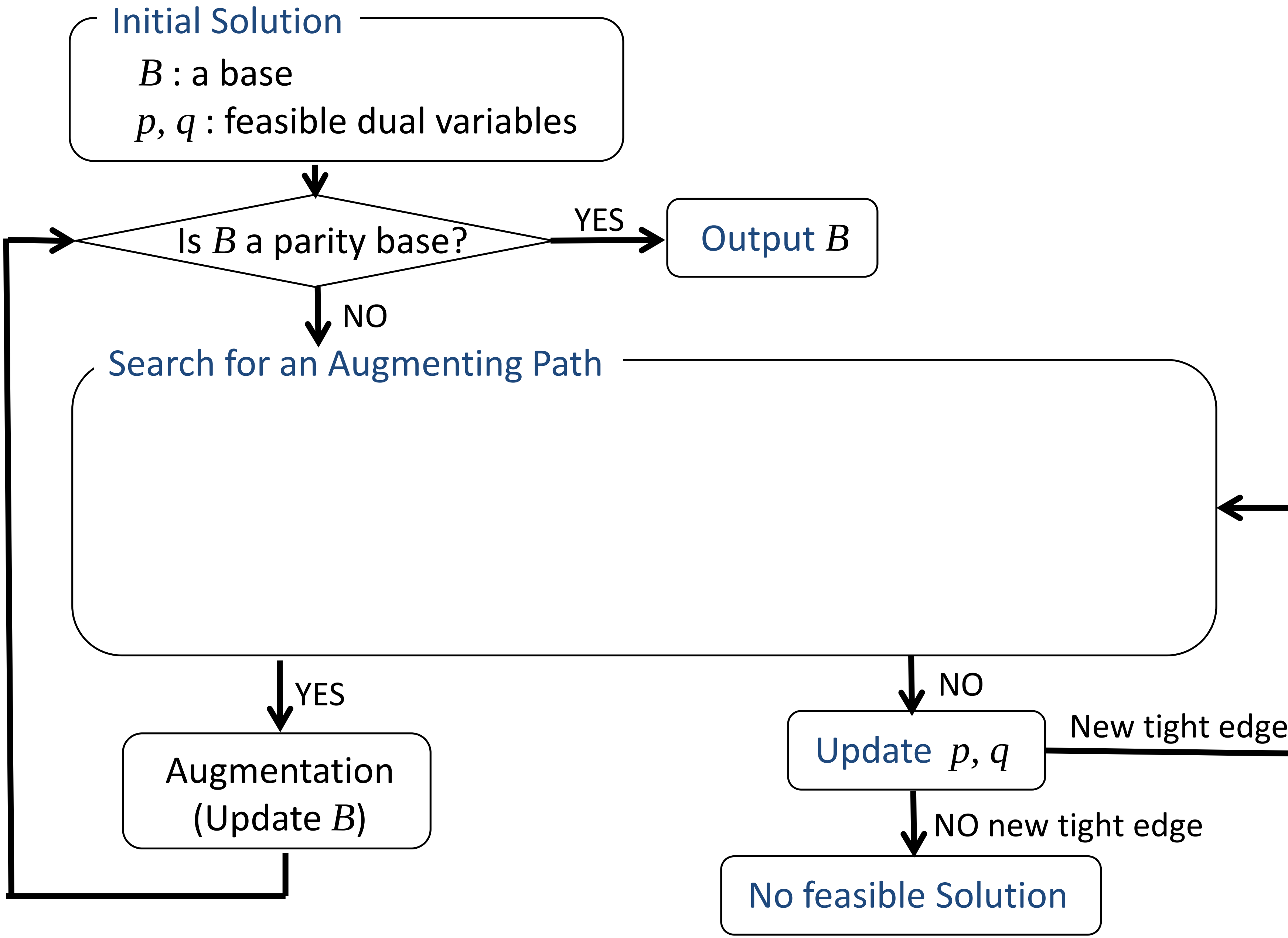
- Dual feasibility

(DF1) $p(u) + p(\bar{u}) = w(l)$ for $l = \{u, \bar{u}\}$

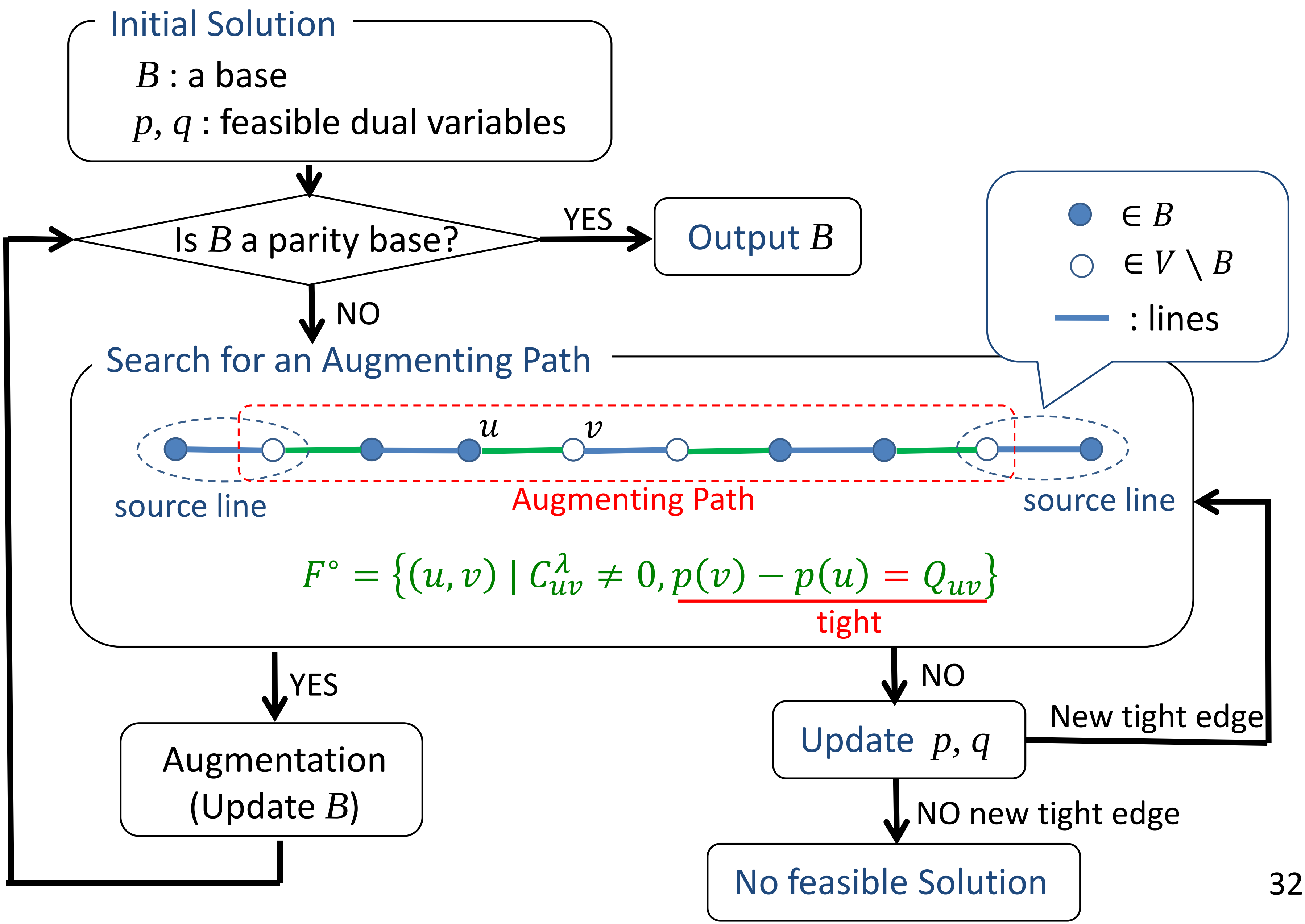
(DF2) $p(v) - p(u) \geq Q_{uv} := \sum_{uv \in \delta(H)} q(H)$ if $C_{uv}^{\lambda} \neq 0$



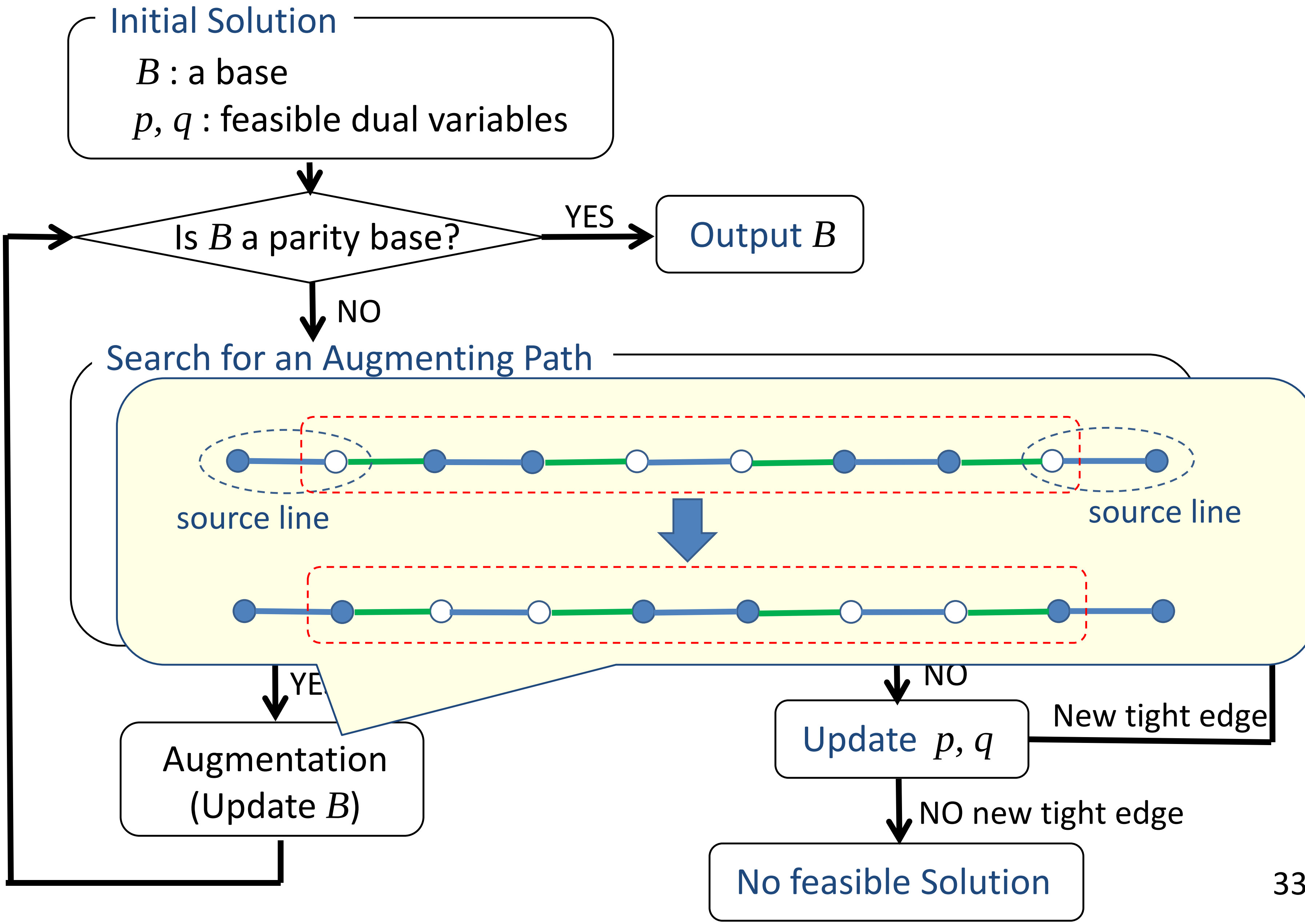
主双対アルゴリズム


Initial Solution
B : a base
p, q : feasible dual variables
Is B a parity base?
YES
Output B
NO
Search for an Augmenting Path
YES
Augmentation
(Update B)
NO
Update p, q
New tight edge
NO new tight edge
No feasible Solution

主双対アルゴリズム

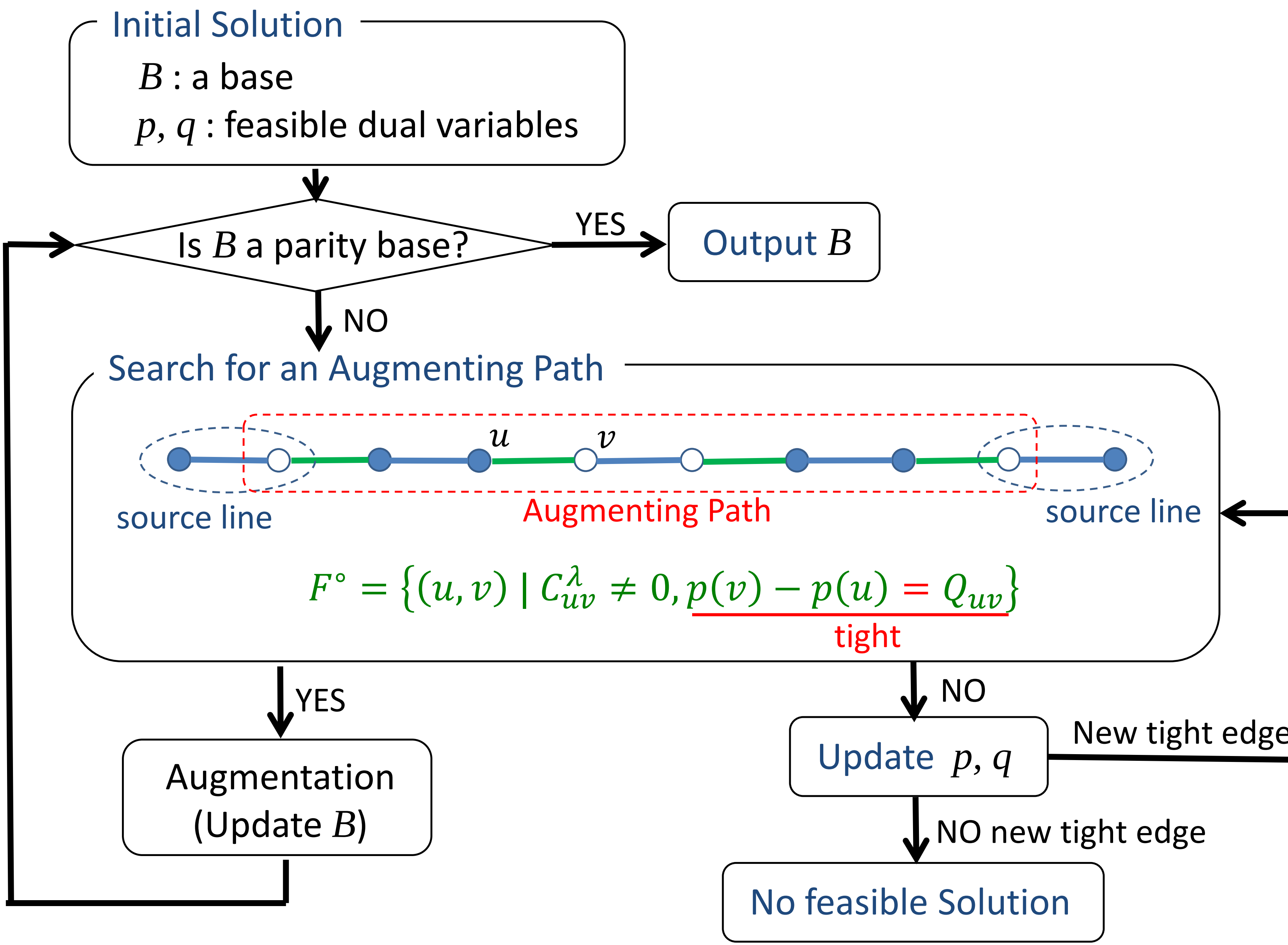

Initial Solution
B : a base
p, q : feasible dual variables
Is B a parity base?
YES
Output B
NO
$\in B$
$\in V \setminus B$
: lines
Search for an Augmenting Path
u
v
source line
Augmenting Path
source line
$F^{\circ} = \{(u,v) \mid C^{\lambda}_{uv} \neq 0, p(v) - p(u) = Q_{uv}\}$
tight
YES
Augmentation
(Update B)
NO
Update p, q
New tight edge
NO new tight edge
No feasible Solution

主双対アルゴリズム



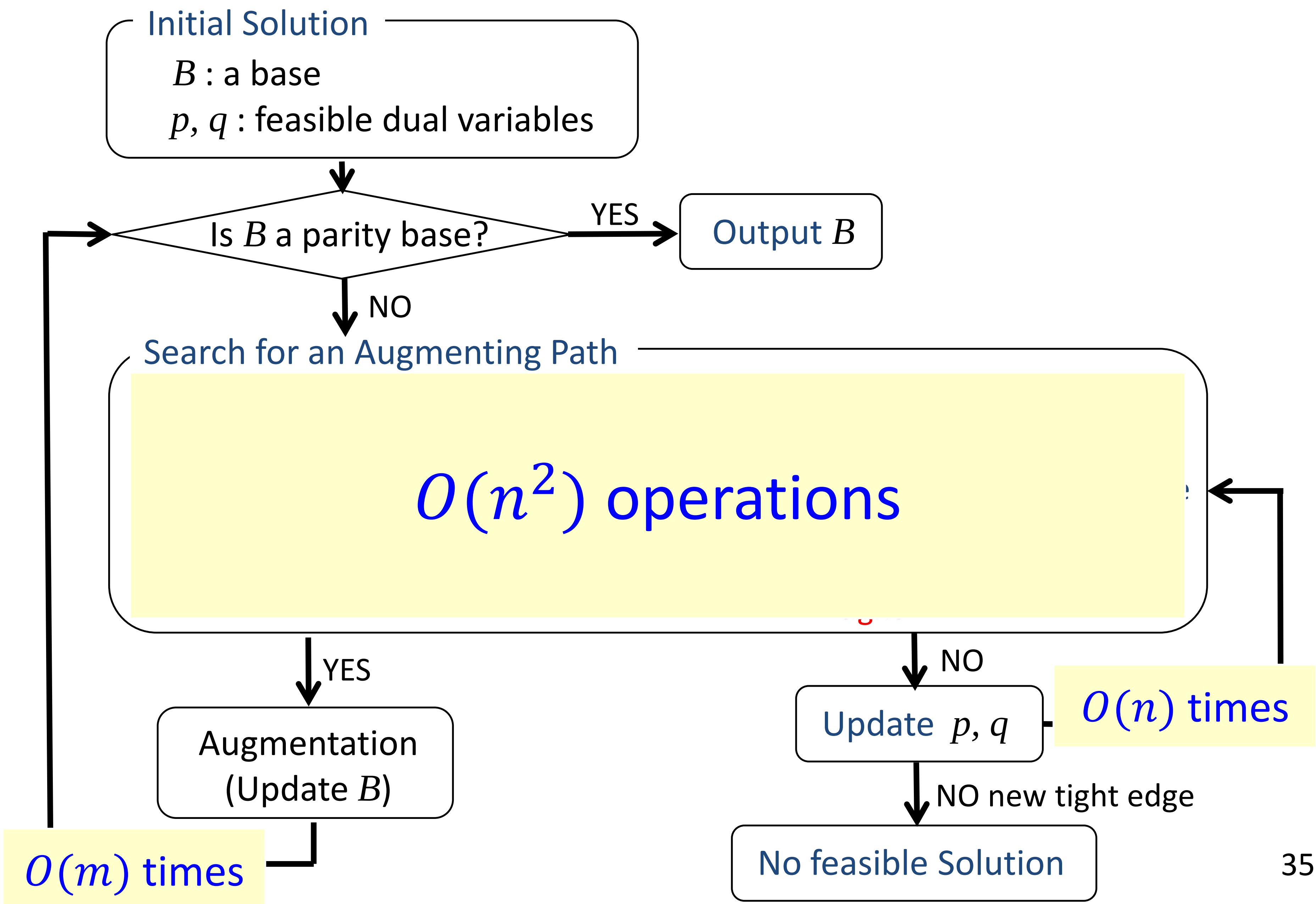
Initial Solution
B : a base
p, q : feasible dual variables
Is B a parity base?
YES
Output B
NO
Search for an Augmenting Path
source line
source line
NO
Update p, q
New tight edge
Augmentation
(Update B)
NO new tight edge
No feasible Solution

主双対アルゴリズム


Initial Solution
B : a base
p, q : feasible dual variables
Is B a parity base?
YES
Output B
NO
Search for an Augmenting Path
u
v
source line
Augmenting Path
source line
$F^\circ = \{(u,v) \mid C^\lambda_{uv} \neq 0, p(v) - p(u) = Q_{uv}\}$
tight
YES
NO
Augmentation
(Update B)
Update p, q
New tight edge
NO new tight edge
No feasible Solution

主双対アルゴリズム

$|V|=n,\ |U|=m$



まとめ

$|V|=n,\ |U|=m$

定理

提案アルゴリズムは最小重み線形マトロイドパリティを $O(n^3m)$ 回の演算で求められる

- 有限体 **K** 上の問題であれば $O(n^3m)$ 時間で解ける
- 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の問題は多項式時間で解ける　(要議論)

まとめ

$|V|=n,\ |U|=m$

定理

提案アルゴリズムは最小重み線形マトロイドパリティを $O(n^3m)$ 回の演算で求められる

- 有限体 **K** 上の問題であれば $O(n^3m)$ 時間で解ける
- 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の問題は多項式時間で解ける　（要議論）

難しさ

- LP表現が無い → “双対変数”の適切な定義
- 最適性の証明，各ステップの正確な記述・正当性