重み付きマトロイド交わり問題に対する厳密解法と近似解法
(ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2016)

垣村 尚徳
東京大学

Chien-Chung Huang (チャルマース工科大学)
神山 直之 (九州大学)

ERATO感謝祭 Season III

2016年8月

概要

- マトロイド交わり問題 (定義はのちほど)
  - 効率的に計算ができる基本的な組合せ最適化問題

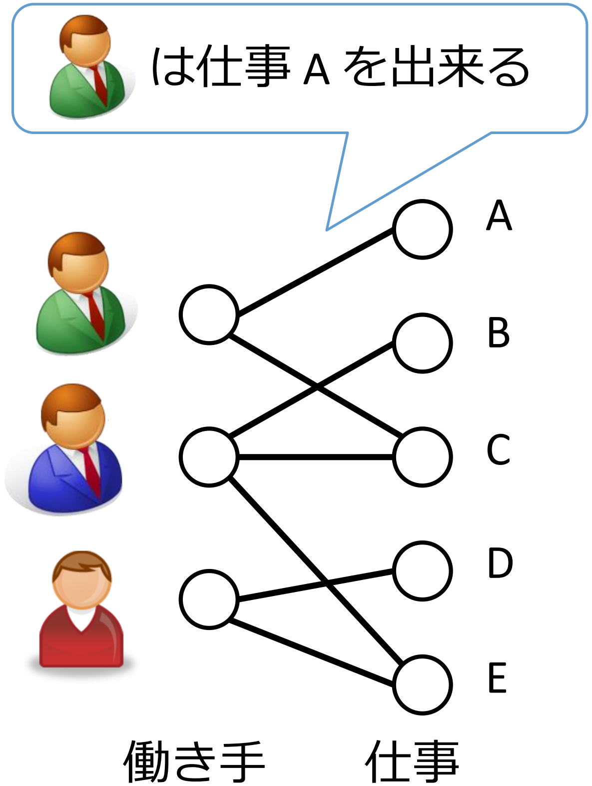
成果 1：重み付きマトロイド交わり問題の新しい解法

- 擬多項式時間(最大重みに依存)だが, 重みが小さいと最速
- アイデア：マッチングに対する重みを分解する手法を拡張
  - 二部グラフ [Kao-Lam-Sung-Ting 01] 一般 [Huang-Kavitha 12, Pettie 12]

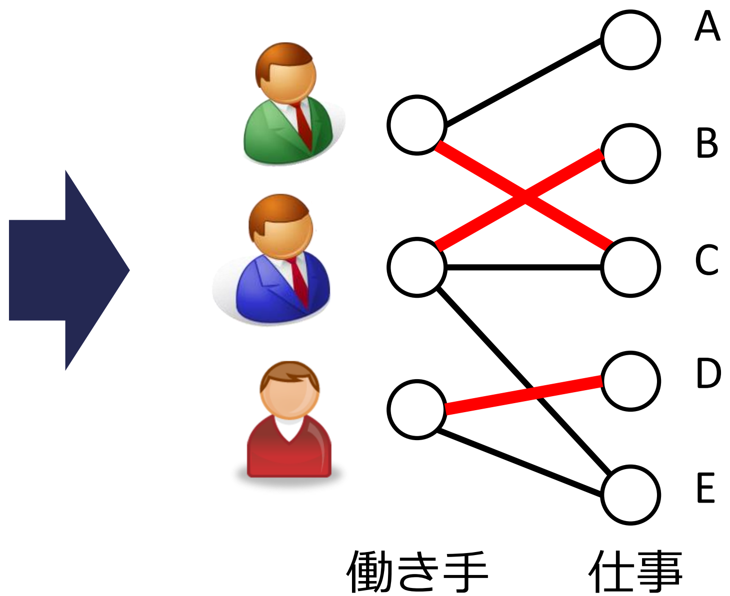
成果 2：高速な近似アルゴリズム

- 最適解を計算するよりも高速
- 重みの分解 + スケーリング[Duan-Pettie 14]

二部グラフのマッチング‥仕事の割り当て

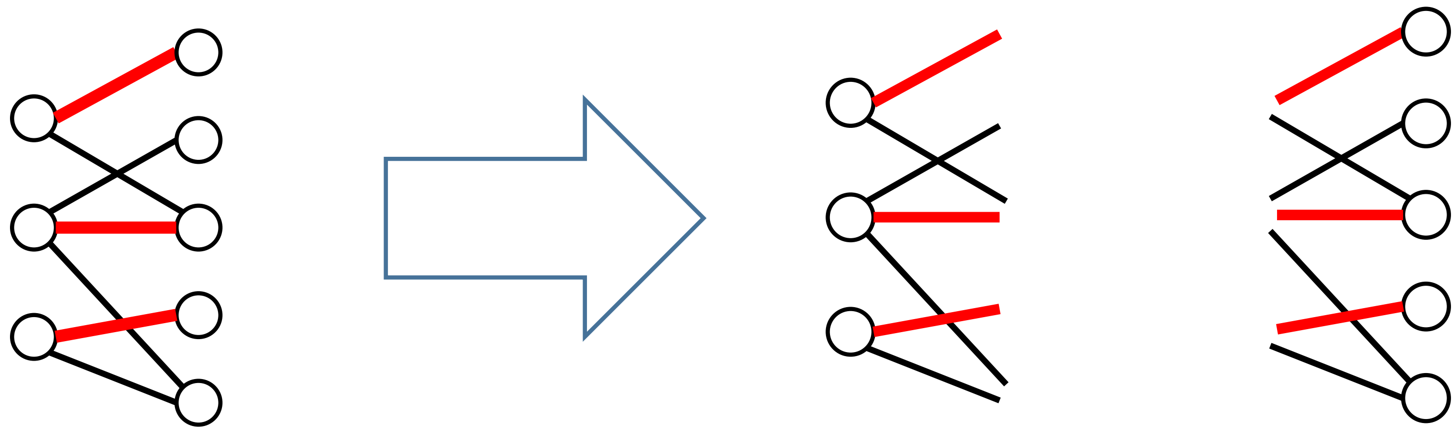


人と仕事のペアを作る
⇔ マッチング



最大マッチングを求めたい

二部グラフ・マッチングの制約の言い換え

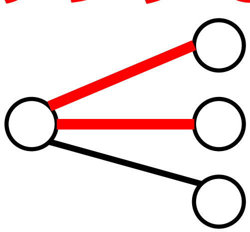


端点を共有しない辺集合

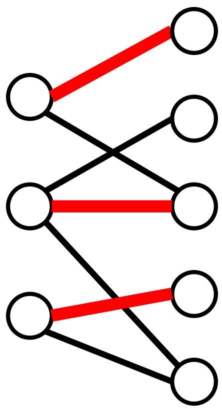
各頂点から
高々ひとつ選ぶ

各頂点から
高々ひとつ選ぶ

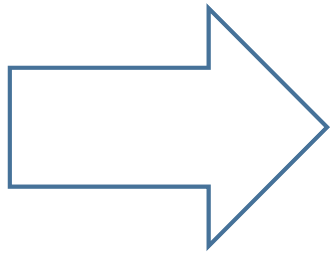
マッチングでない

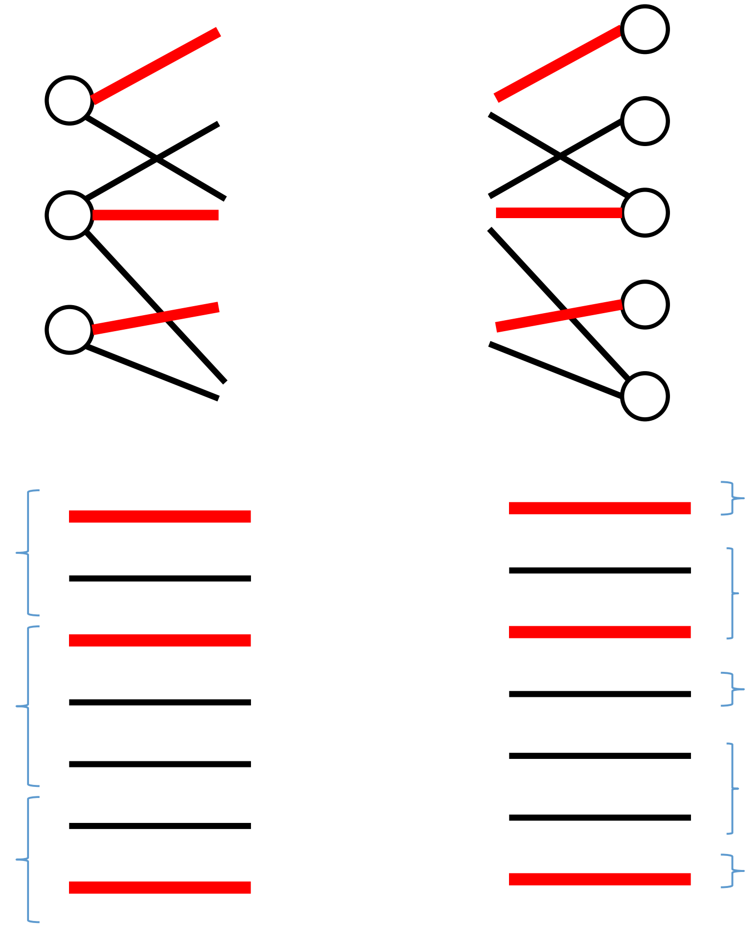


二部グラフ・マッチングの制約の言い換え



端点を共有しない辺集合





各グループから
高々１つ選ぶ

各グループから
高々１つ選ぶ

頂点の隣接関係 = グループ

二部グラフのマッチングの言い換え

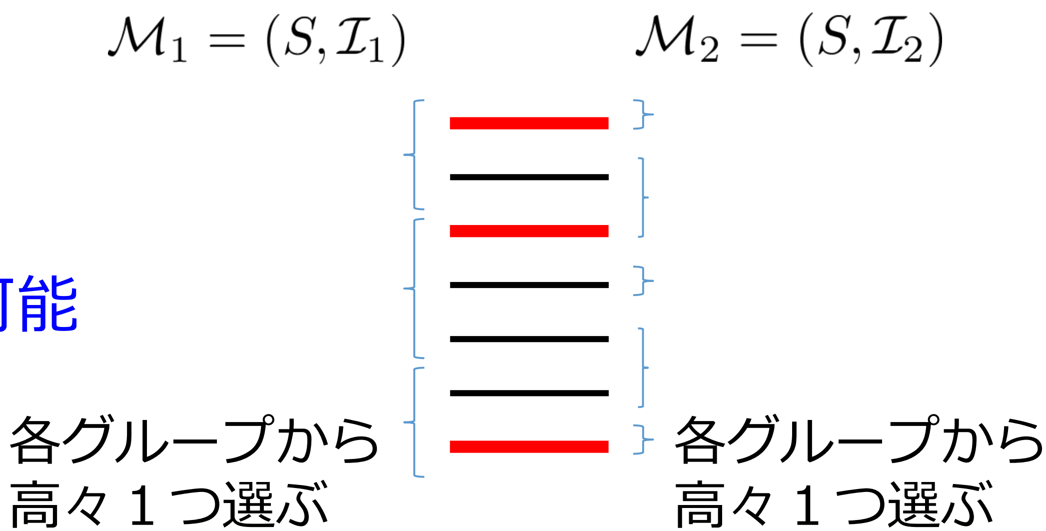
入力: 辺集合S上の制約 $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$ 制約を表す部分集合の族

$\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ 制約を表す部分集合の族

目的: 2つの制約をみたす最大サイズの集合 J

$$\max\ |J| \quad \text{s.t.} \quad J \in \mathcal{I}_1,\ J \in \mathcal{I}_2$$

各制約は
マトロイドを用いて表現可能



マトロイド 交わり 問題

入力: 2つの**マトロイド** $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$ 制約を表す部分集合の族

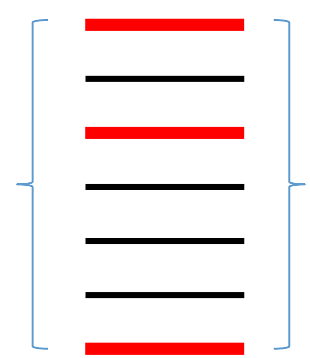
$\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ 制約を表す部分集合の族

目的: 2つの制約をみたす最大サイズの集合 J (共通独立集合)

$$\max\ |J| \quad \text{s.t.} \quad J \in \mathcal{I}_1,\ J \in \mathcal{I}_2$$

$\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$ $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$

マトロイド



マトロイド

マトロイド $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ ：線形独立性の一般化

有限集合S 上の部分集合族 $\mathcal{I}$で以下の性質を持つもの

- $\mathcal{I}$ の要素を独立集合という

- $\emptyset \in \mathcal{I}$
- 独立集合の部分集合は独立

$$J \subseteq I \in \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad J \in \mathcal{I}$$

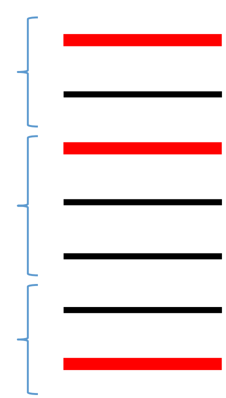
- $I, J \in \mathcal{I}$ で $|I| < |J|$ならば$J - I$ の要素 e を I に足せる

$$\exists e \in J - I \quad \text{s.t. } I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$$

例

- 各グループから高々1 つ選ぶ

$\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$

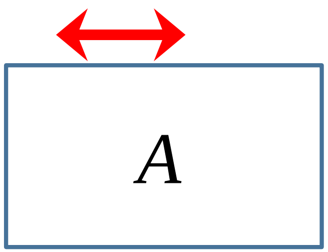


マトロイド $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ ：線形独立性の一般化

有限集合S 上の部分集合族 $\mathcal{I}$でよい性質を持つもの

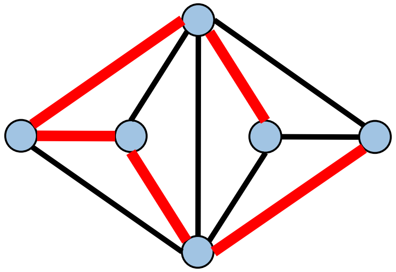
- $\mathcal{I}$の要素を独立集合という

- 行列の線形独立な列ベクトルの族



列の添え字集合で，
対応する列ベクトルが線形独立となるもの

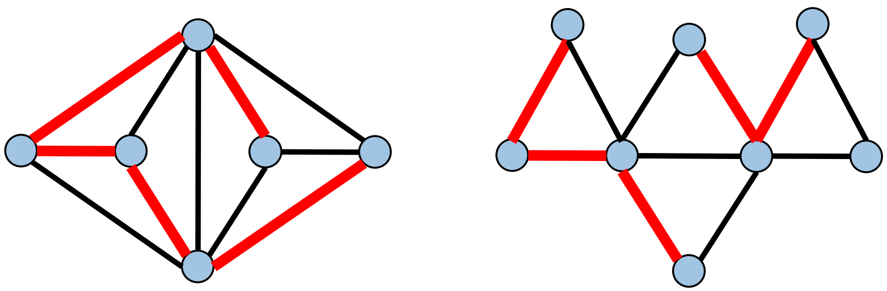
- グラフの森をなす辺部分集合の族



辺部分集合で森を成すもの

マトロイド交わり の例

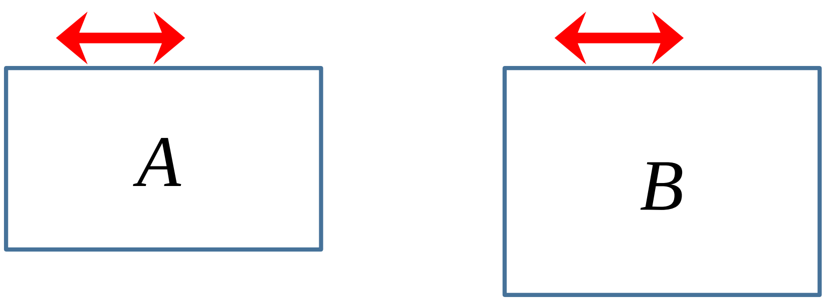
- ２つのグラフの交わり [Gabox-Xu89, Gabow-Stallman85]
  - トラス構造解析，電気回路解析などへの応用 ([Recski 89] など)



辺部分集合で
2つのグラフで森を成すもの

辺集合に1対1対応がある

- 2つの行列の交わり
  - ネットワーク符号化などへの応用
    [Cunningham86, Gabow-Xu96, Harvey07,09, Cheung-Lau-Leung14]



列の添え字集合で，
２つの行列で線形独立となるもの

重み付きマトロイド交わり問題

入力: 2つのマトロイド $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1) \quad \mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$

各要素 $e \in S$ に非負整数重み w_e

目的: 最大重みの共通独立集合 J

$$\max \sum_{e \in J} w_e \quad \text{s.t.} \quad J \in \mathcal{I}_1,\ J \in \mathcal{I}_2$$

- 重み付きの問題の例
  - 二部グラフの最大重みマッチング (各辺に重み)
  - (各辺に重みがある) 2つのグラフの交わり
  - (各列に重みがある) 2つの行列の交わり

重み付きマトロイド交わり問題

入力: 2つのマトロイド $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$ $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$

各要素 $e \in S$ に非負整数重み w_e

目的: 最大重みの共通独立集合 J

$$\max \sum_{e \in J} w_e \quad \text{s.t.} \quad J \in \mathcal{I}_1,\ J \in \mathcal{I}_2$$

- 多項式時間アルゴリズム

Edmonds(1970) , Aigner-Dowling (1971), Cunningham (1986),
Gabow-Xu (1996), Lawler (1970/71), Iri-Tomizawa (1976)
Frank (1981), Brezovec-Cornuejols-Glover (1986), Fujishige-Zhang (1995)
Shigeno-Iwata (1995), Gabow-Xu (1996), …

本研究の動機

重み付き と 重み無し の計算量の違いを知る

- 重み無しのアルゴリズムを使った高速化

τ : 集合が独立かを判定する計算量

重み付き：**遅い**

- 増加道を用いる解法: $O(nr^2 \cdot \tau)$
  [Frank(1981), Brezovec-Cornuejols-Glover (1986), etc]

重み無し：**速い**

- 高速化： $O(nr^{1.5} \cdot \tau)$ [Cunningham 86]

n ： 台集合 S の大きさ
r ： マトロイドのランク
(最大独立集合の大きさ)

成果: 重み付マトロイド交わり問題の厳密解法

W 個の重み無しの問題に分解可能

- W:最大重み

- 計算時間： $O(W\boxed{nr^{1.5}\cdot\tau)}$

  重み無しアルゴリズム [Cunningham 86]

- W が小さいと速い

  if $W = o\left(\min\left\{\sqrt{r},\ \dfrac{n\log r}{r}\right\}\right)$

➢ 先行研究との比較:

- 増加道を用いるもの: $O(nr^2\cdot\tau)$
  - Frank(1981), Brezovec-Cornuejols-Glover (1986), etc
- スケーリング: $O(n^2\sqrt{r}\log(rW)\cdot\tau)$
  - Fujishige-Zhang (1995), Shigeno-Iwata (1995), Gabow-Xu (1996)

応用: 特殊なマトロイドの場合

W 個の重み無しの問題に分解可能

- 一般の場合: $O(W\boxed{nr^{1.5}\cdot\tau})$
  [Cunningham 86]

➢ 特別なマトロイドには特別なアルゴリズム

先行研究

- 2つのグラフ: $O(W\boxed{n\sqrt{r}\log r})$
  [Gabow-Xu 89]
  先行研究: $O(n\sqrt{r}\log^2 r\log(rW))$ [Gabow-Xu 89]
- 2つの行列: $O(W\boxed{nr^{1.38}})$ [Harvey 09]
  先行研究:
  - $O(nr^{1.77}\log(rW))$ [Gabow-Xu 96]
  - $O(W^{1+\varepsilon}nr^{1.38}\mathrm{poly}\log(nW))$ [Harvey 07]

最大重みW が小さい場合に先行研究より高速

成果2: 近似アルゴリズム

W 個の重み無しの問題を解くと最適解

スケーリング(cf [Duan-Pettie 14])

$O(\varepsilon^{-1}\log r)$ 個の重み無しの問題を解くと $(1-\varepsilon)$ **近似解**

- 具体的には
  - 一般: $O\left(\varepsilon^{-1}\log r\cdot \boxed{nr^{1.5}\cdot\tau}\right)$ [Cunningham 86]
  - グラフ: $O(\varepsilon^{-1}\log r\cdot \boxed{n\sqrt{r}\log r})$ [Gabow-Xu 89]
  - 行列: $O\left(\varepsilon^{-1}\log r\times \boxed{nr^{1.38}}\right)$ [Harvey 09]

成果2: 近似アルゴリズム

W 個の重み無しの問題を解くと最適解

⇩ スケーリング(cf [Duan-Pettie 14])

$O(\varepsilon^{-1}\log r)$ 個の重み無しの問題を解くと $(1-\varepsilon)$ **近似解**

Cf) 多項式可解な問題に対する近似アルゴリズム

- 最大マッチング
  - Duan-Pettie14 など
- 最大流問題
  - Christiano-Kelner-Madry-Spielman-Teng11
  - Kelner-Lee-Orecchia-Sidford14 など

厳密解法
マトロイドを修正して重み無し問題を解く

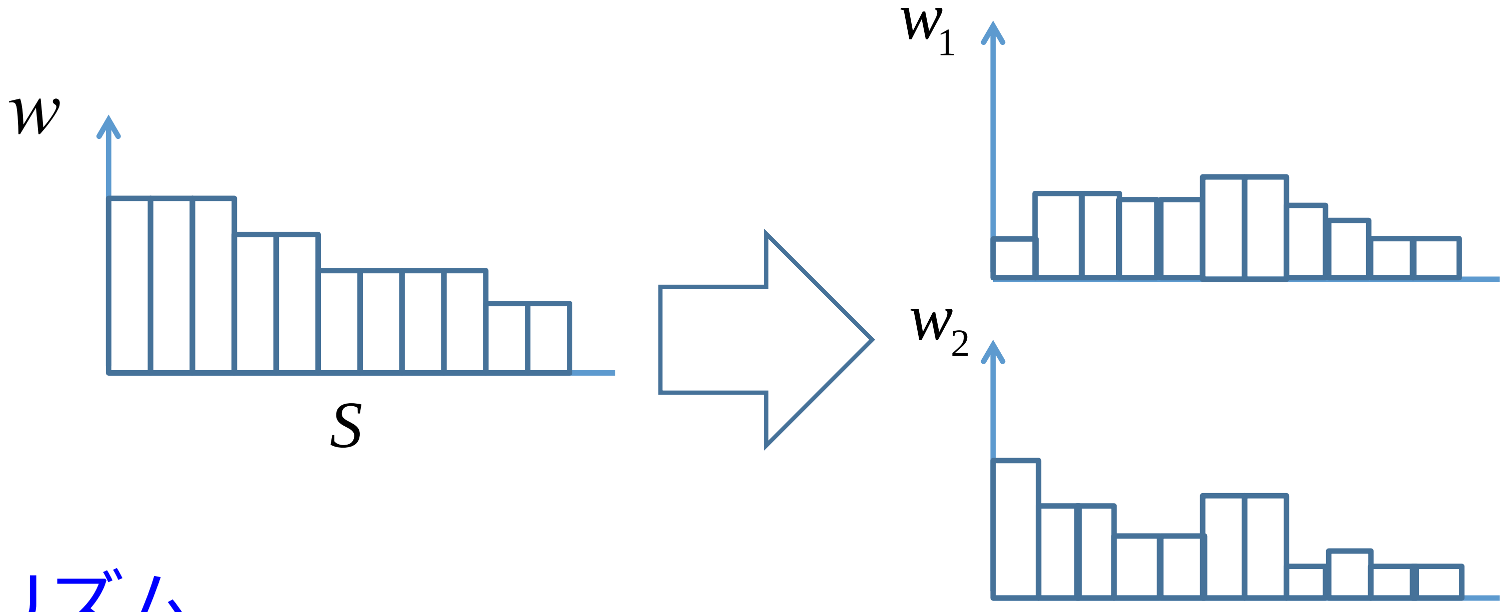
マッチングに対する重みを分解する手法を拡張

二部グラフ [Kao-Lam-Sung-Ting 01]

一般グラフ [Huang-Kavitha 12, Pettie 12]

アイデア: 重み分割 [Frank 1981]

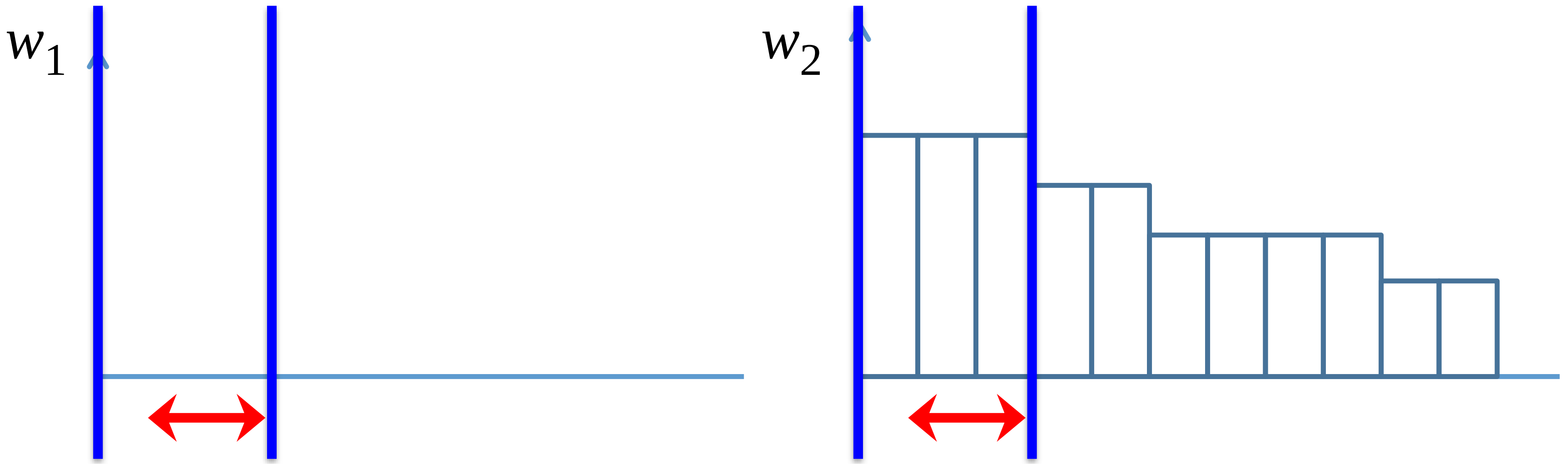
- 重みwを2つに分割: $w = w_1 + w_2$



アルゴリズム

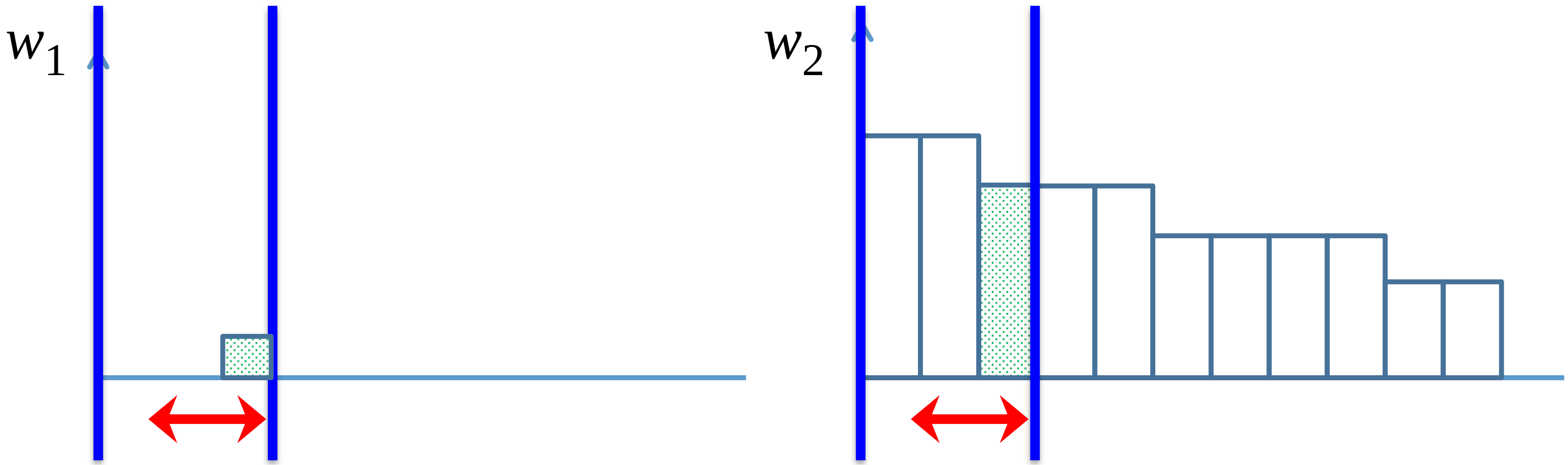
- $i = W, \ldots, 1$ に対して以下を繰り返す
  - w_1 と w_2 を使って **新しいマトロイド** $\mathcal{M}'_1$ と$\mathcal{M}'_2$ を定義
  - 新マトロイド上で**最大サイズ**の共通独立集合J を求める
  - J をもちいて w_1 と w_2 を更新

1回目の反復： $i = W$ のとき



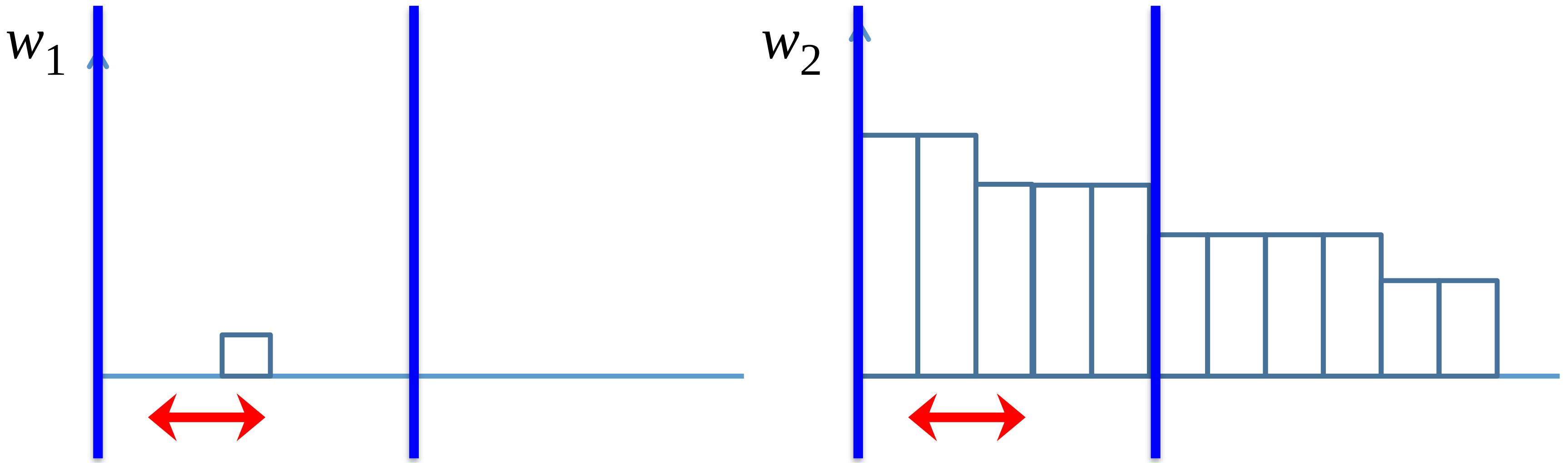
- 初期値： $w_1 = 0$ と $w_2 = w$
- 重みが $\geq W$ の要素 | | のみに着目
  - もとのマトロイド $\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_2$ を用いて
  - サイズ最大の共通独立集合を求める

1回目の反復： $i = W$ のとき



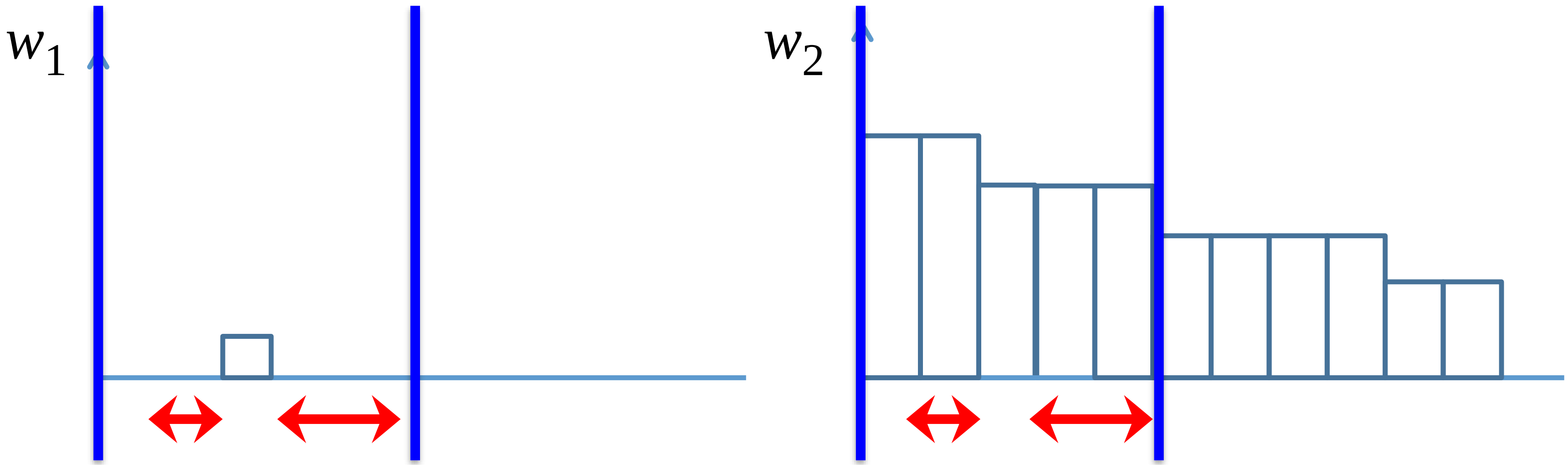
- 初期値： $w_1 = 0$ と $w_2 = w$
- 重みが $\geq W$ の要素 のみに着目
  - もとのマトロイド $\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_2$ を用いて
  - サイズ最大の共通独立集合を求める
  - **w_1とw_2の更新**
    - Frank81と似た方法

i 反復目



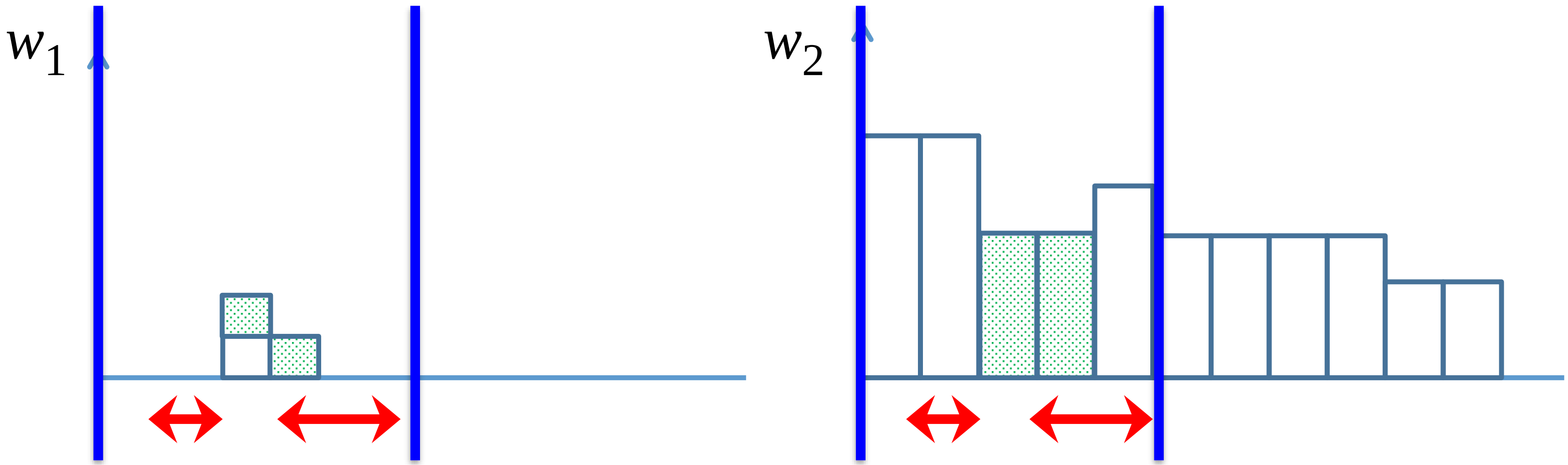
- 重みが $\geq i$ の要素 | | のみに着目
  - **w_1 と w_2 を用いて新しいマトロイドを定義**
    - $\mathcal{M}_j$ の w_j-最大重み独立集合のみに着目
    - (w_j-最大重み基 の部分集合族) を | | へ制限したもの

i 反復目



- 重みが $\geq i$ の要素 のみに着目
  - w_1 と w_2を用いて新しいマトロイドを定義
    $\mathcal{M}_j$ の w_j-最大重み独立集合のみに着目
  - の中で**サイズ最大の共通独立集合を求める**
  - w_1 と w_2 を更新

i 反復目



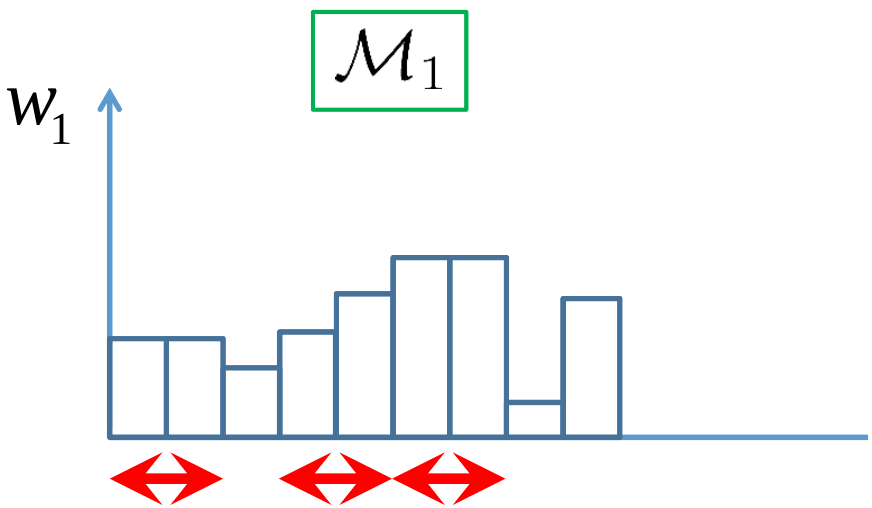
- 重みが $\geq i$ の要素のみに着目
  - w_1 と w_2を用いて新しいマトロイドを定義
    - $\mathcal{M}'_j$ の w_j-最大重み独立集合のみに着目
  - の中でサイズ最大の共通独立集合を求める
  - **w_1 と w_2 を更新**

正当性：重み分割を用いた最適性判定

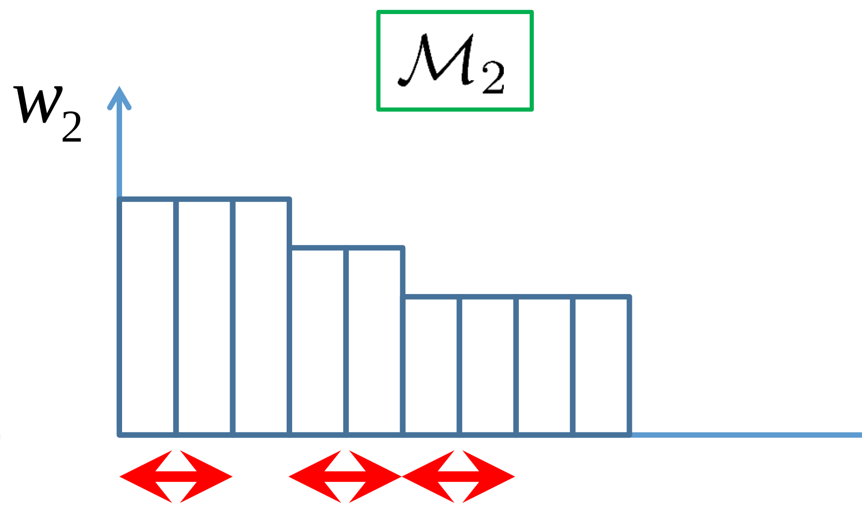
↓ を満たせば 集合 J は最適解

- 集合 J が $\mathcal{M}_1$上でw_1-最大重み独立集合
- $\mathcal{M}_2$上でw_2-最大重み独立集合

⇨ アルゴリズムの最終目標



J :w_1-最大重み独立集合



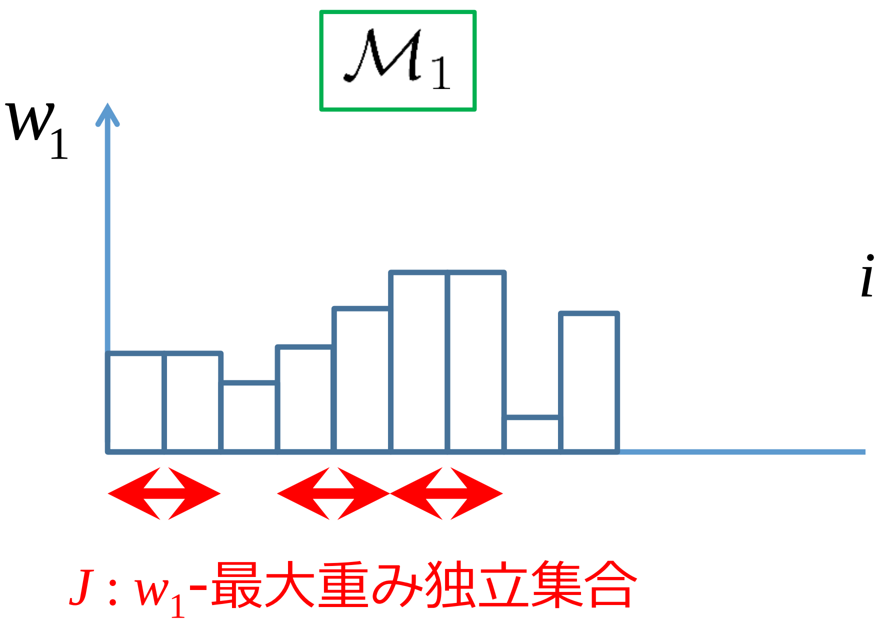
J : w_2-最大重み独立集合

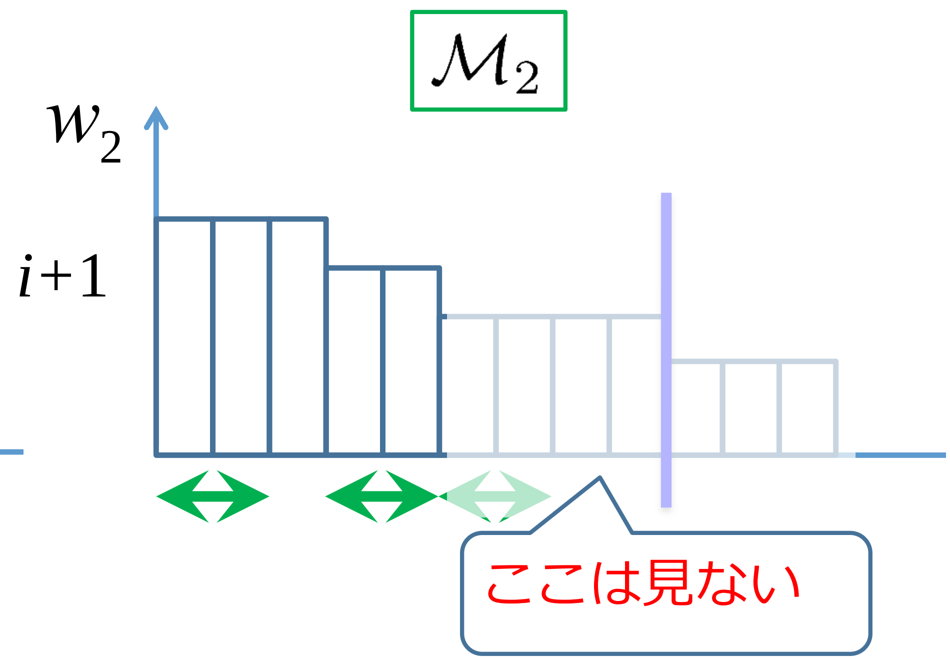
反復 i で J が満たす性質

緩和した最適性条件：

- J が $\mathcal{M}_1$上でw_1-最大重み独立集合
- $\mathcal{M}_2$上でほぼw_2-最大重み独立集合

重み$w_2(e) > i$ の要素 e のみを見ると
w_2-重み最大



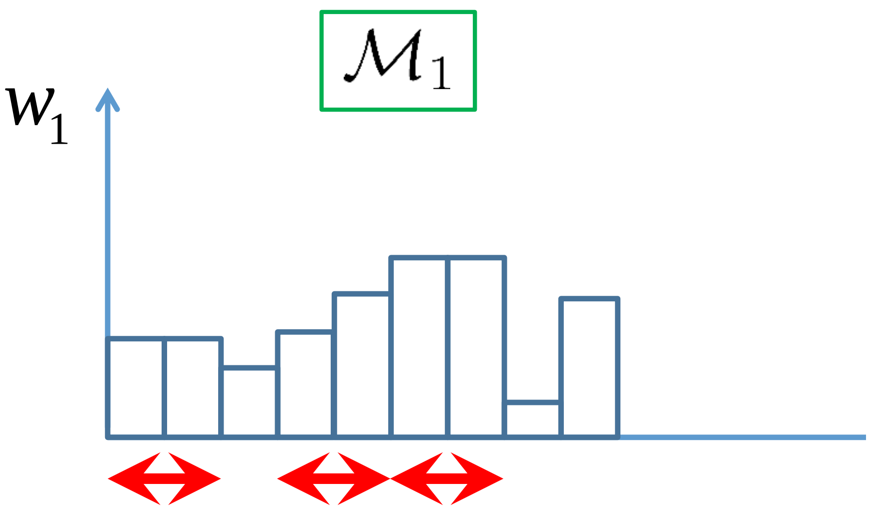


アルゴリズム終了時 (i = 0) → 最大重み

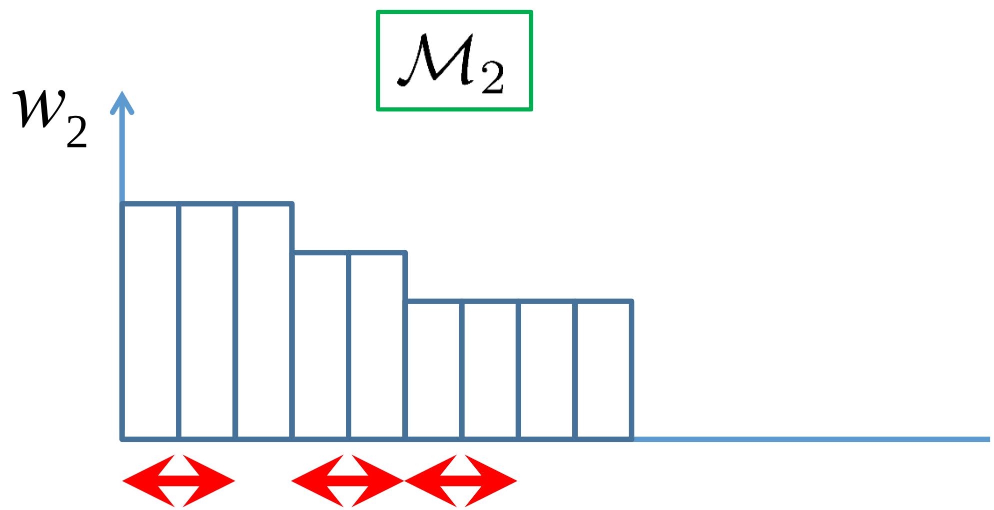
~~緩和した~~最適性条件：

- J は $\mathcal{M}_1$上でw_1-最大重み独立集合
- $\mathcal{M}_2$ 上で~~ほぼ~~w_2-最大重み独立集合

重み$w_2(e) > 0$ の要素 eのみを見ると
w_2-重み最大



J : w_1-最大重み独立集合



J : w_2-最大重み独立集合

厳密アルゴリズムのまとめ

- $i = W, \ldots, 1$ に対して以下を繰り返す
  - w_1 と w_2 を使って **新しいマトロイド** $\mathcal{M}'_1$ と $\mathcal{M}'_2$ を定義
  - 新マトロイド上で**最大サイズ**の共通独立集合 J を求める
  - J をもちいて w_1 と w_2 を更新

計算時間: $W \times \boxed{O(nr^{1.5} \cdot \tau)}$

重み無しアルゴリズム [Cunningham 86]

正当性：重み分割による最適性基準

- マトロイドが特殊な場合
  - もし $\mathcal{M}$ がグラフ/行列ならば，$\mathcal{M}'$ も同様

近似アルゴリズム：重みを丸めて厳密解法

刻み幅 δ_j を変えつつ厳密アルゴリズムを適用

$$\delta_j = \frac{\varepsilon W}{2^j}$$

For $j = 1,\ldots,\log \varepsilon W$

重みを δ_j の倍数に丸めて 厳密アルゴリズムを適用

- $i = W/2^{j-1},\ldots,W/2^j$ として以下を繰り返す
  - w_1 と w_2 を使って 新しいマトロイド $\mathcal{M}'_1$ と $\mathcal{M}'_2$ を定義
  - 新マトロイド上で最大サイズの共通独立集合を求める
  - w_1 と w_2 を δ_j ずつ更新

若干の修正

⇒ 近似率 ＝ $(1-\varepsilon)$

まとめ：マトロイド交わり問題

- 効率的に計算ができる基本的な組合せ最適化問題

成果 1：重み付きマトロイド交わり問題の新しい解法

- 重み無しのマトロイド交わり問題 を繰り返し計算
  - マッチングに対する手法の拡張

    二部グラフ [Kao-Lam-Sung-Ting 01] 一般 [Huang-Kavitha 12, Pettie 12]

- 進展： $O(n^2 \log(nW) \cdot \tau)$ [Lee-Sidford-Wong15]

成果 2：高速な近似アルゴリズム

- 重みの分解 + スケーリング[Duan-Pettie 14]
- さらなる改良(ほぼ線形時間近似) [Chekuri-Quanrud SODA16]