Finding a Path in Group-Labeled Graphs with Two Labels Forbidden

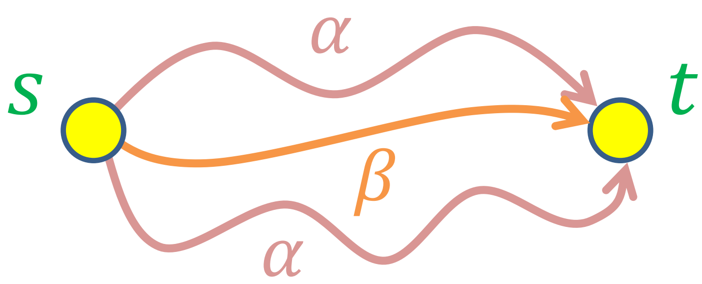
(ICALP 2015)

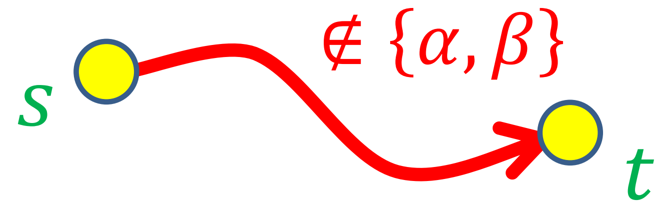
河瀬 康志[1], 小林 佑輔[2], **山口 勇太郎**[3]

1. 東京工業大学 社会理工学研究科 社会工学専攻 助教
2. 筑波大学 システム情報系 社会工学域 准教授
3. 東京大学 情報理工学系研究科 数理情報学専攻 D3

ERATO感謝祭 SEASON Ⅱ　2015/08/04

概要

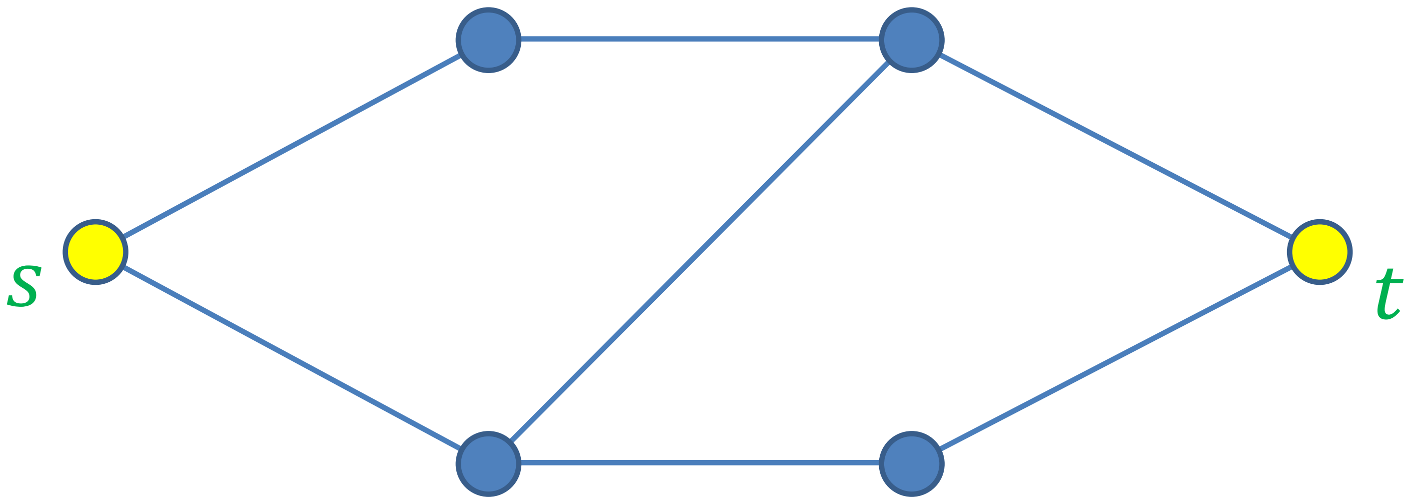




群ラベル付きグラフにおいて，

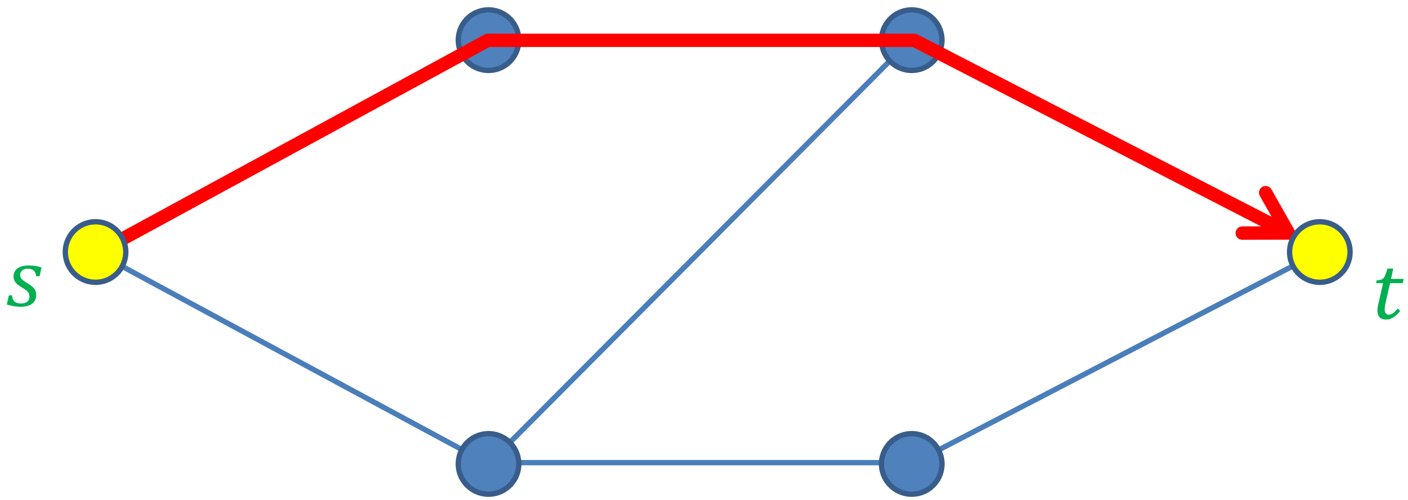
- 2点 s, t を結ぶパスの**取りうるラベル**が**ちょうど2種類**であるための**必要十分条件**を与え，
- それに基づき，**2ラベル禁止 s–t パス**を求める**多項式時間アルゴリズム**を提案した．

長さの偶奇性



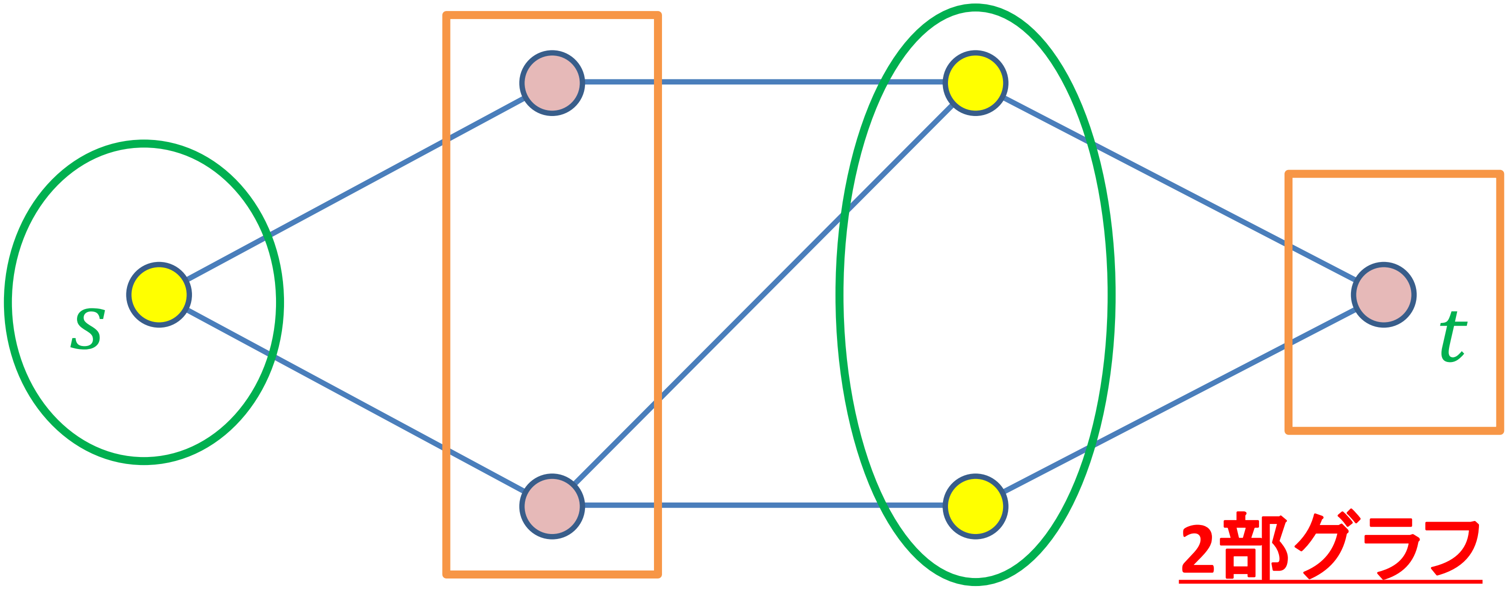
- Odd $\to$???
- Even $\to$???

長さの偶奇性



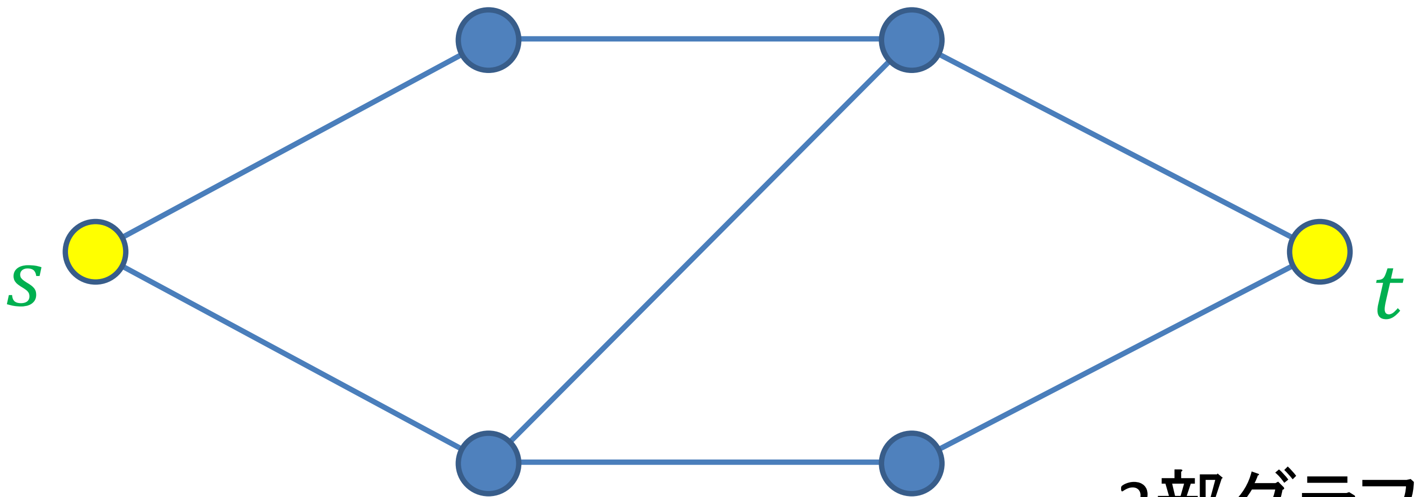
- <u>**Odd → YES**</u>
- Even → ???

長さの偶奇性



- Odd → YES
- **Even → NO**

長さの偶奇性

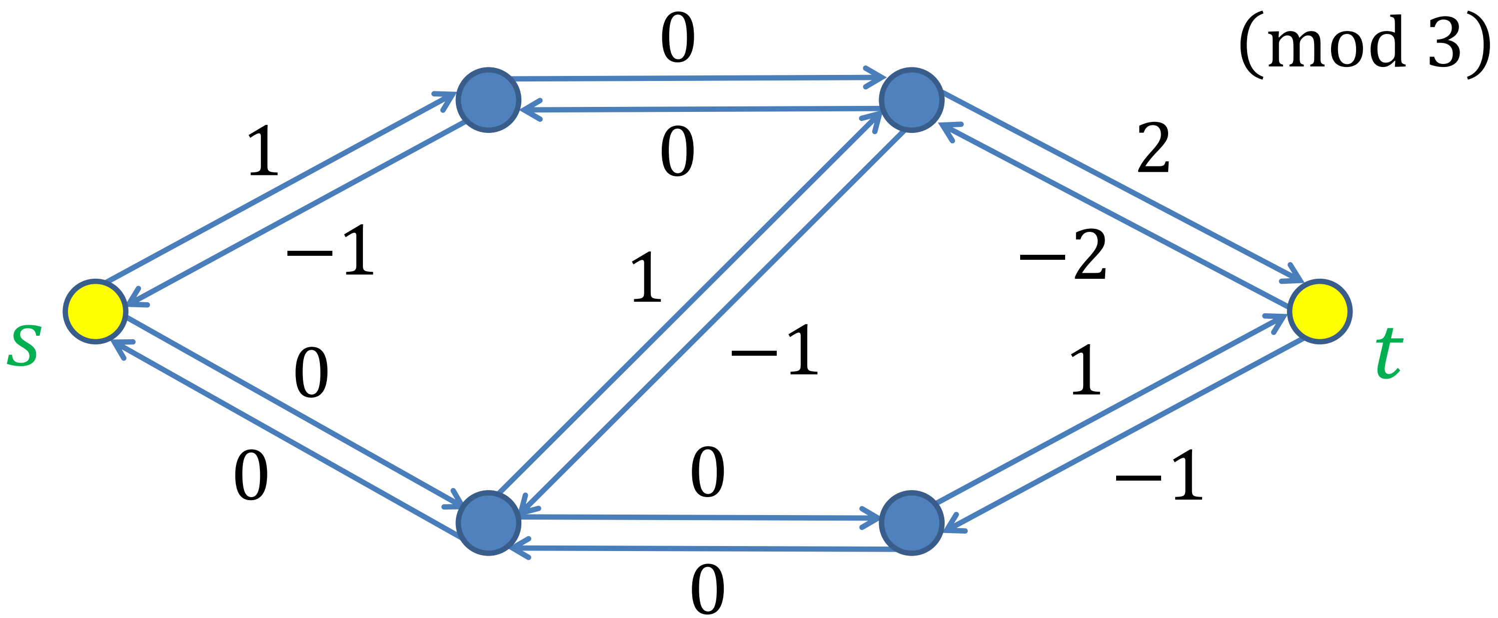


2部グラフ
↓
判定は容易

- Odd → YES
- Even → NO

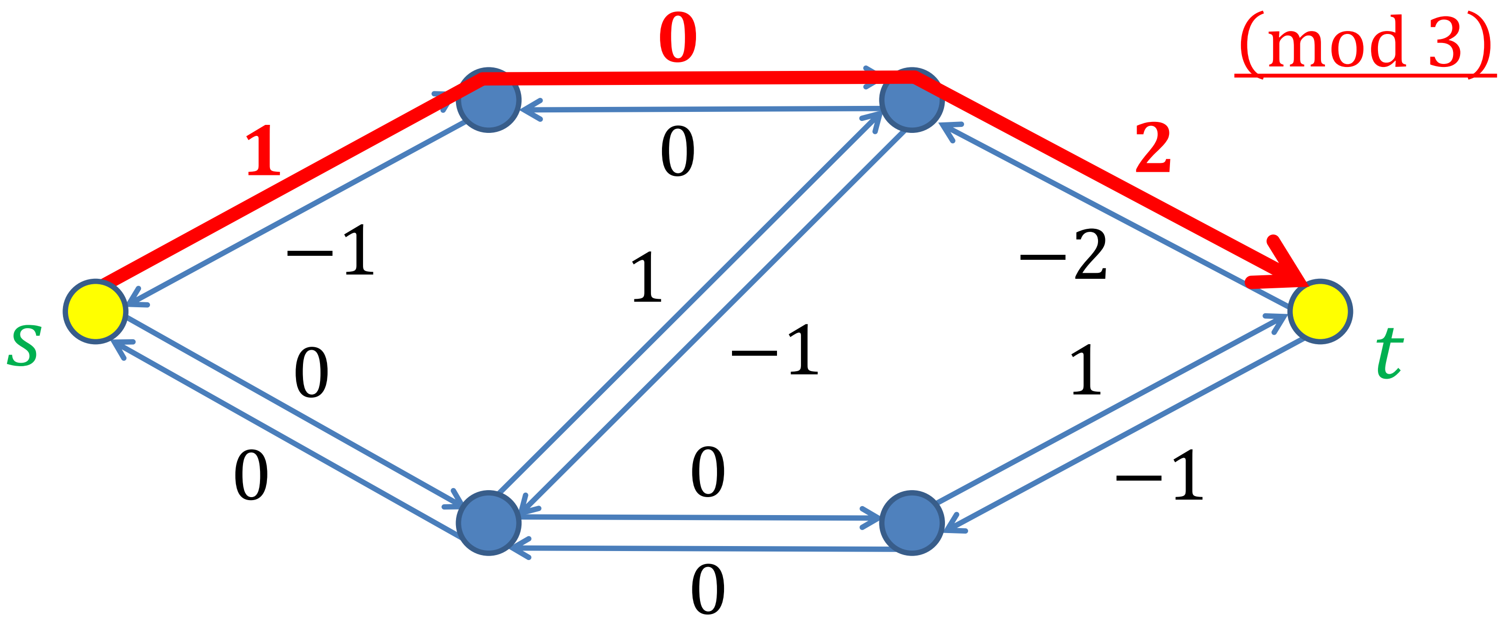
s–t パスの長さの偶奇 = {Odd}

取りうるラベル



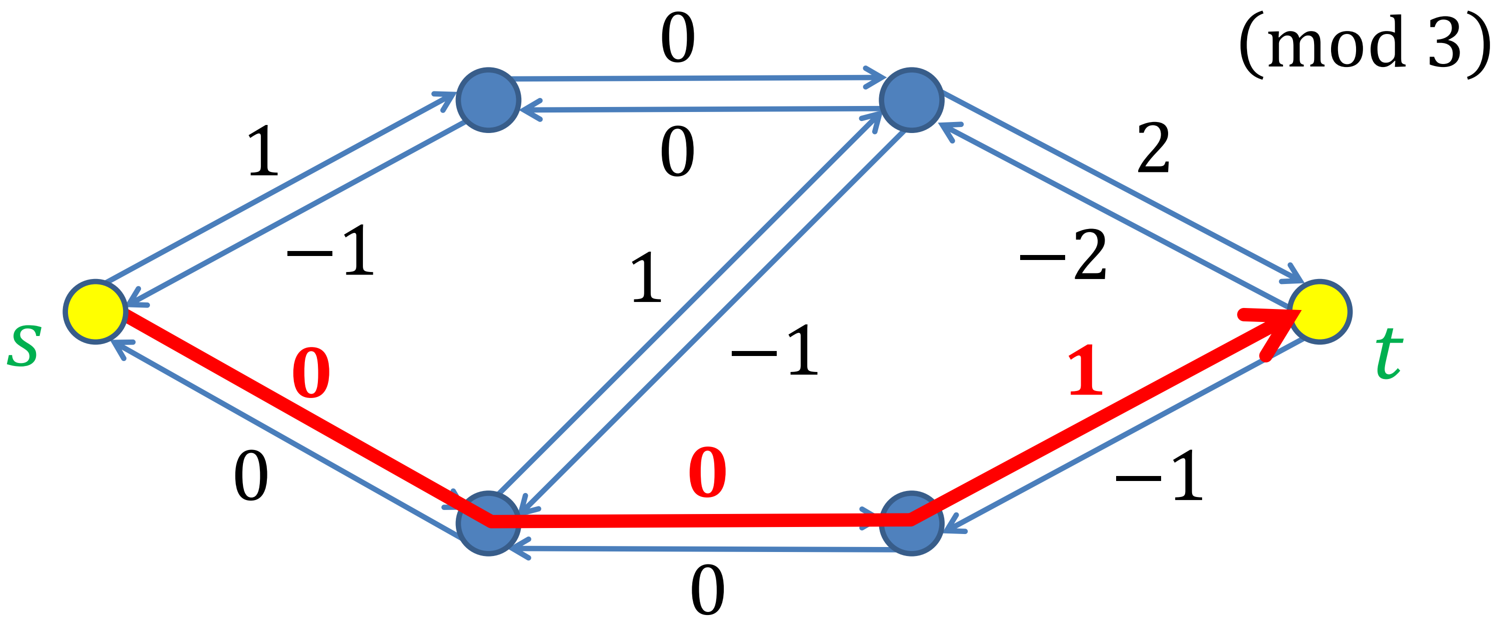
- $0 \rightarrow$???
- $1 \rightarrow$???
- $2 \rightarrow$???

取りうるラベル



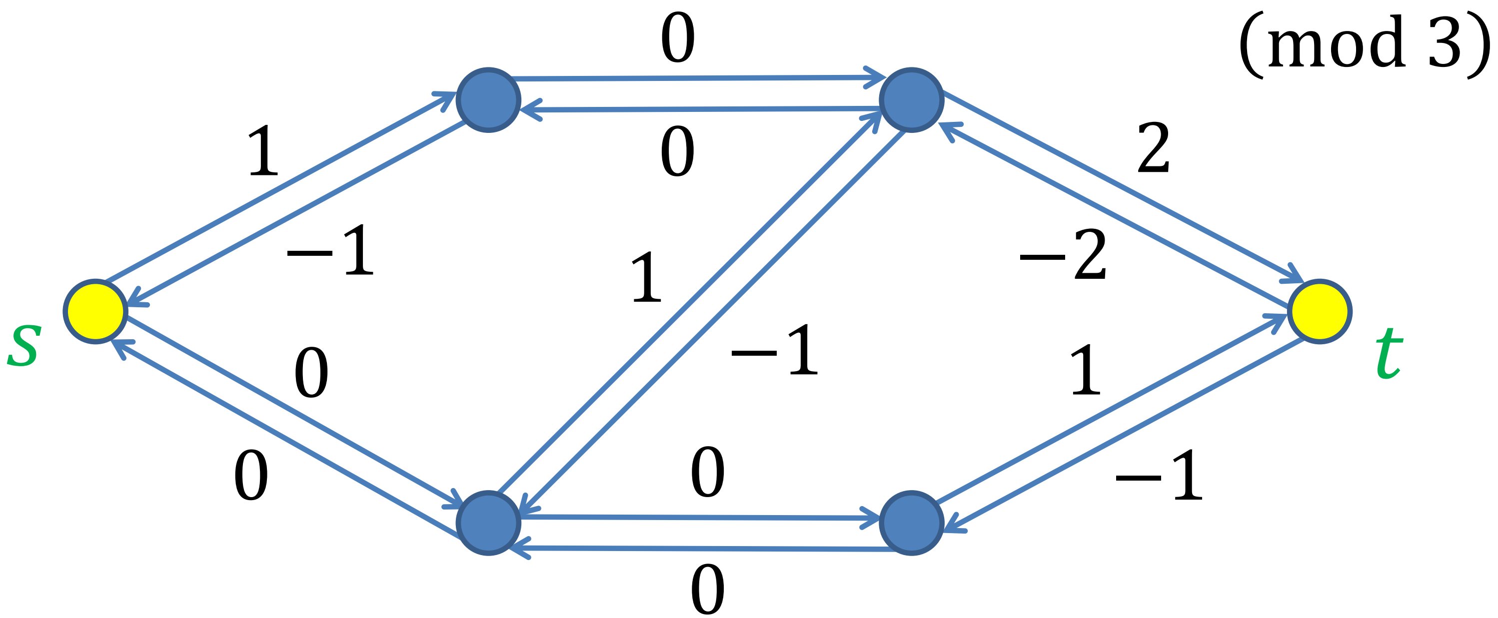
- <u>$0 \ \rightarrow$ **YES**</u> $\quad 1+0+2=3\equiv 0$
- $1 \ \rightarrow \ ???$
- $2 \ \rightarrow \ ???$

取りうるラベル



- $0 \rightarrow$ YES
- <u>$1 \rightarrow$ **YES**</u> $0 + 0 + 1 = 1$
- $2 \rightarrow$???

取りうるラベル



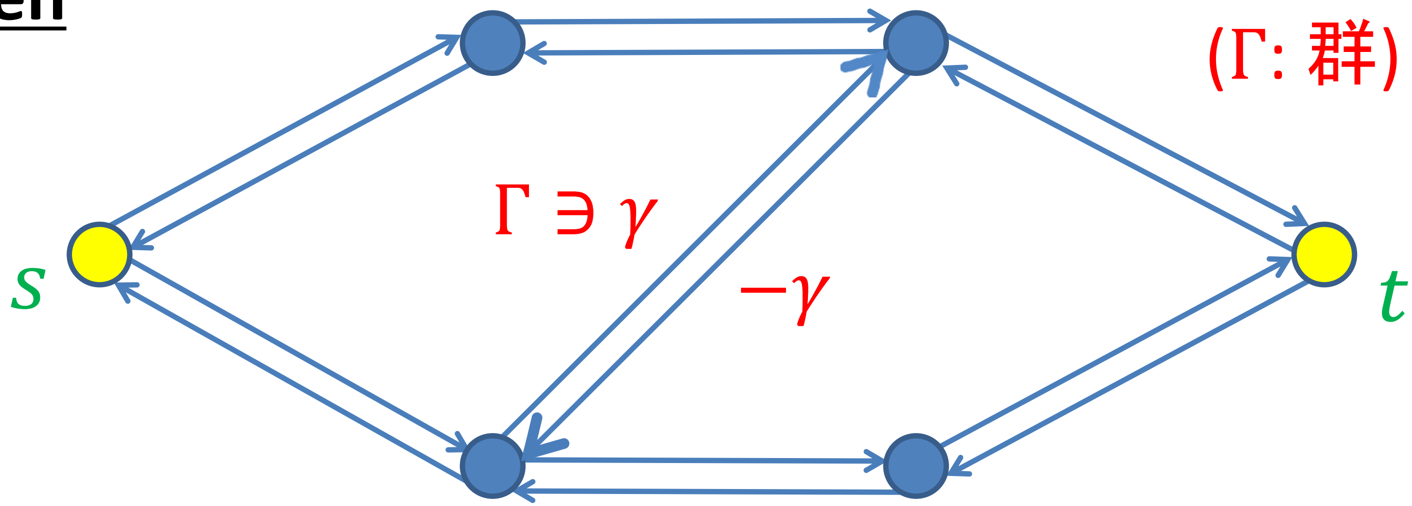
- 0 → YES
- 1 → YES
- 2 → NO

<u>s–t パスの取りうるラベル $= \{0, 1\}$</u>

扱う問題

<u>Given</u>

群ラベル付きグラフ
(Γ: 群)

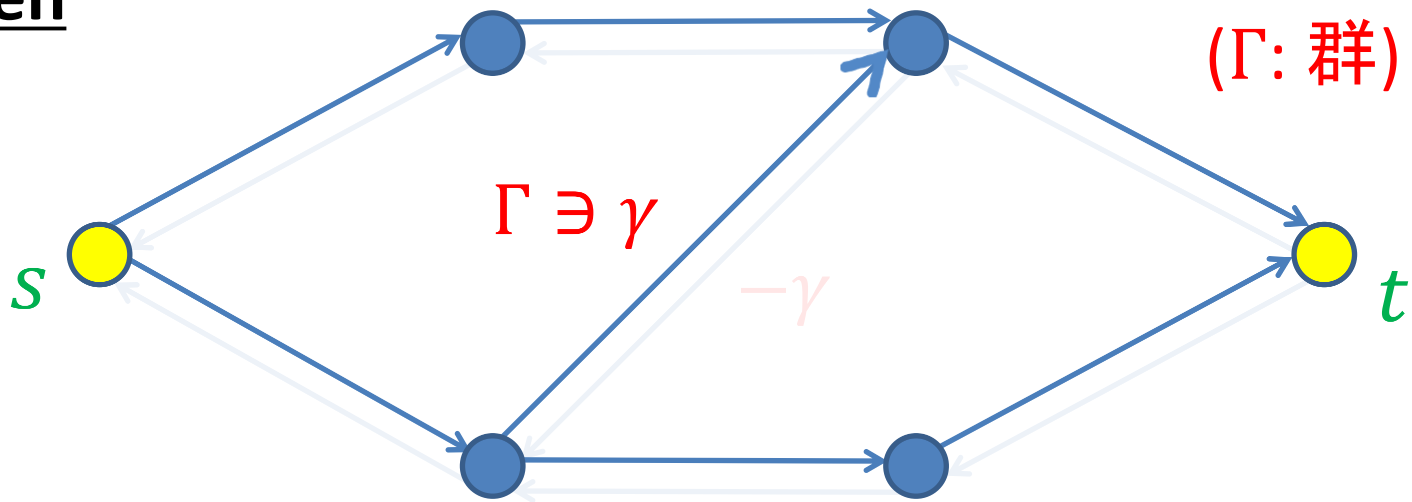


<u>Find</u>　　s–t パスの取りうるラベル

扱う問題

Given

群ラベル付きグラフ
(Γ: 群)

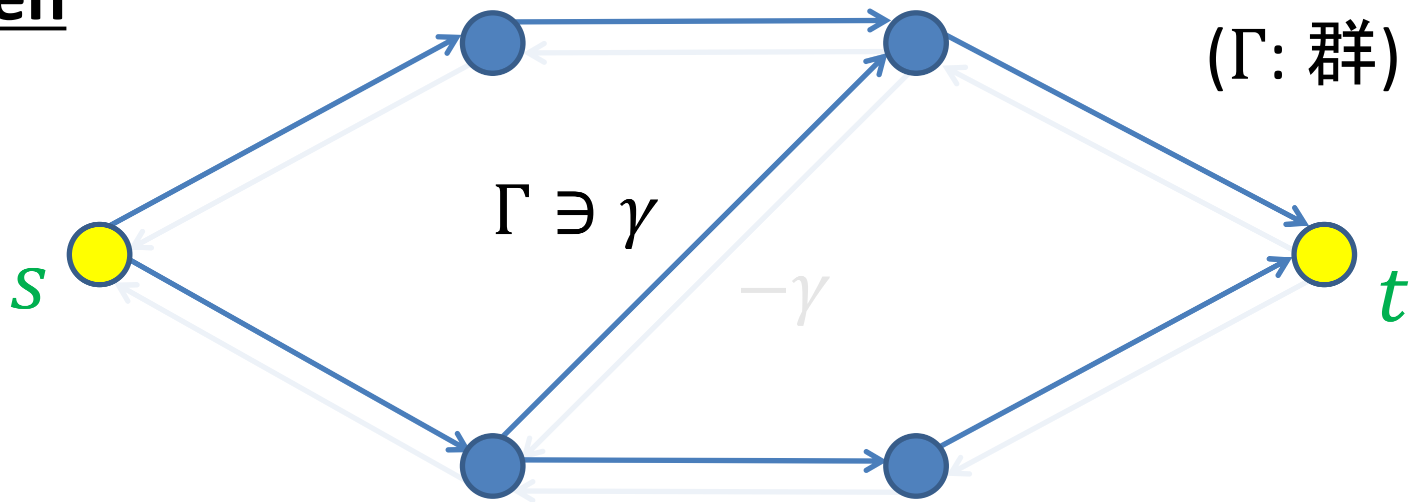


Find s–t パスの取りうるラベル

扱う問題

群ラベル付きグラフ
(Γ: 群)

<u>**Given**</u>



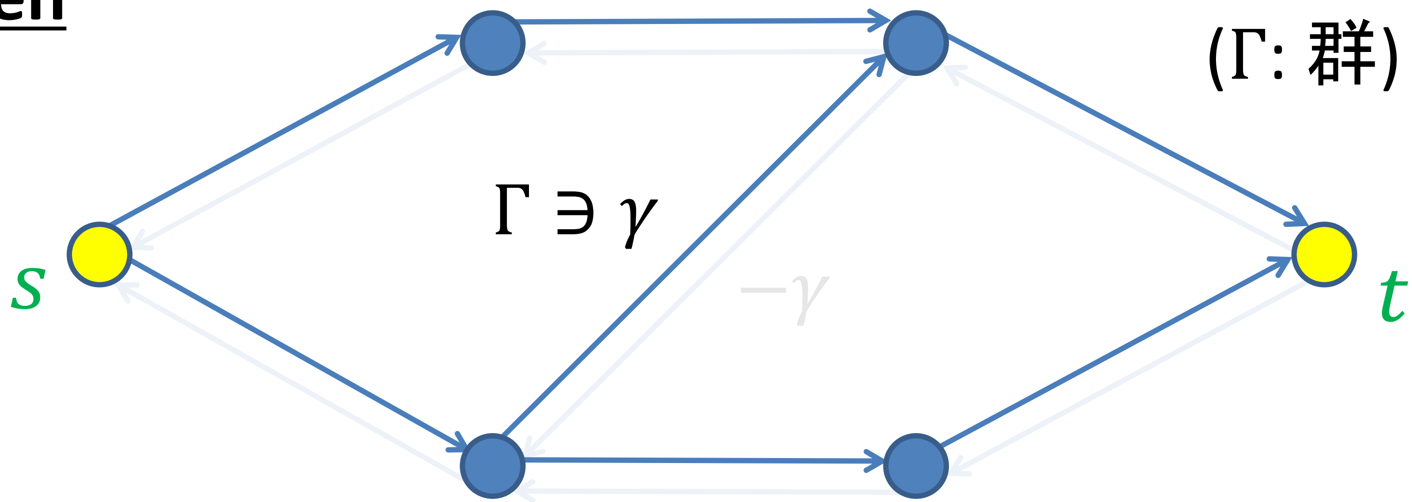
<u>**Find**</u> s–t パスの**取りうるラベル → 難しい**

- $l = \{\alpha\}$: 多項式時間
- $l \supseteq \{\alpha\}$: NP困難 (ハミルトンパス問題など)
- $l = \{\alpha, \beta\}$: ???

扱う問題

<u>Given</u>

群ラベル付きグラフ
(Γ: 群)



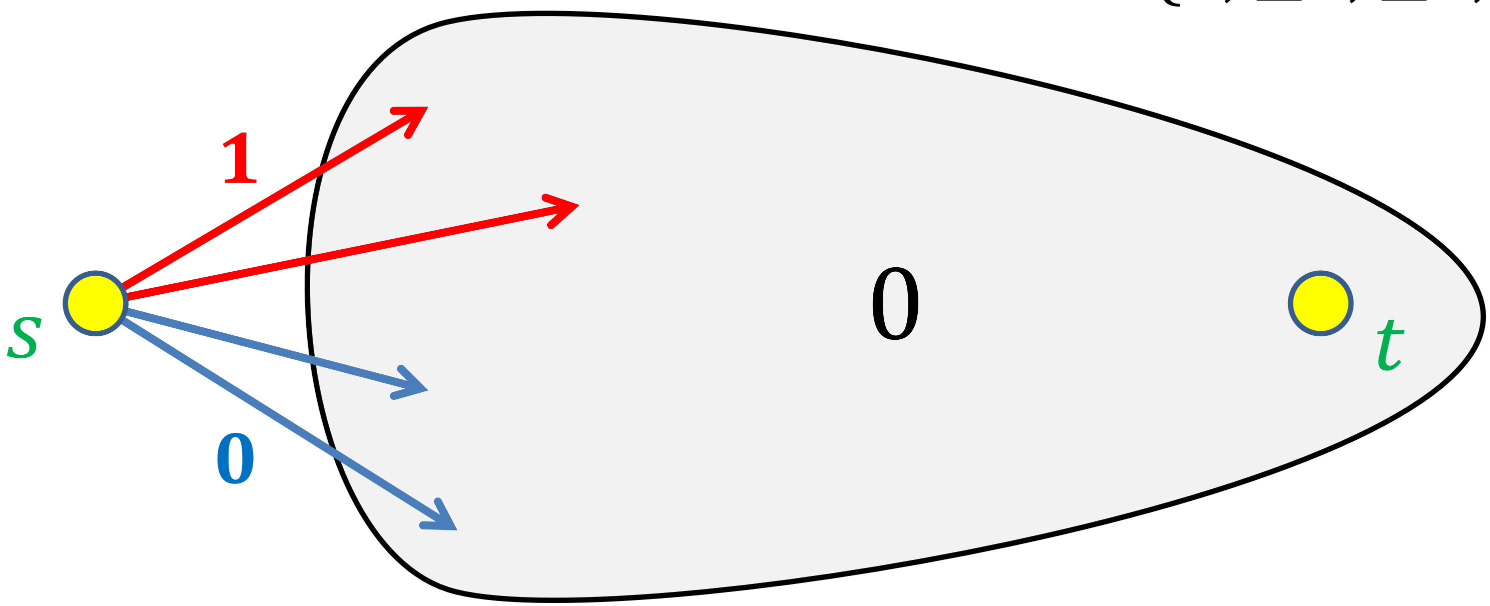
<u>Find</u> s–t パスの**取りうるラベル** → **難しい**

- $l = \{\alpha\}$: 多項式時間
- $l \supseteq \{\alpha\}$: NP困難 (ハミルトンパス問題など)
- <u>$l = \{\alpha, \beta\}$: **多項式時間！**</u>

例1

$\mathbf{Z}$ラベル付きグラフ

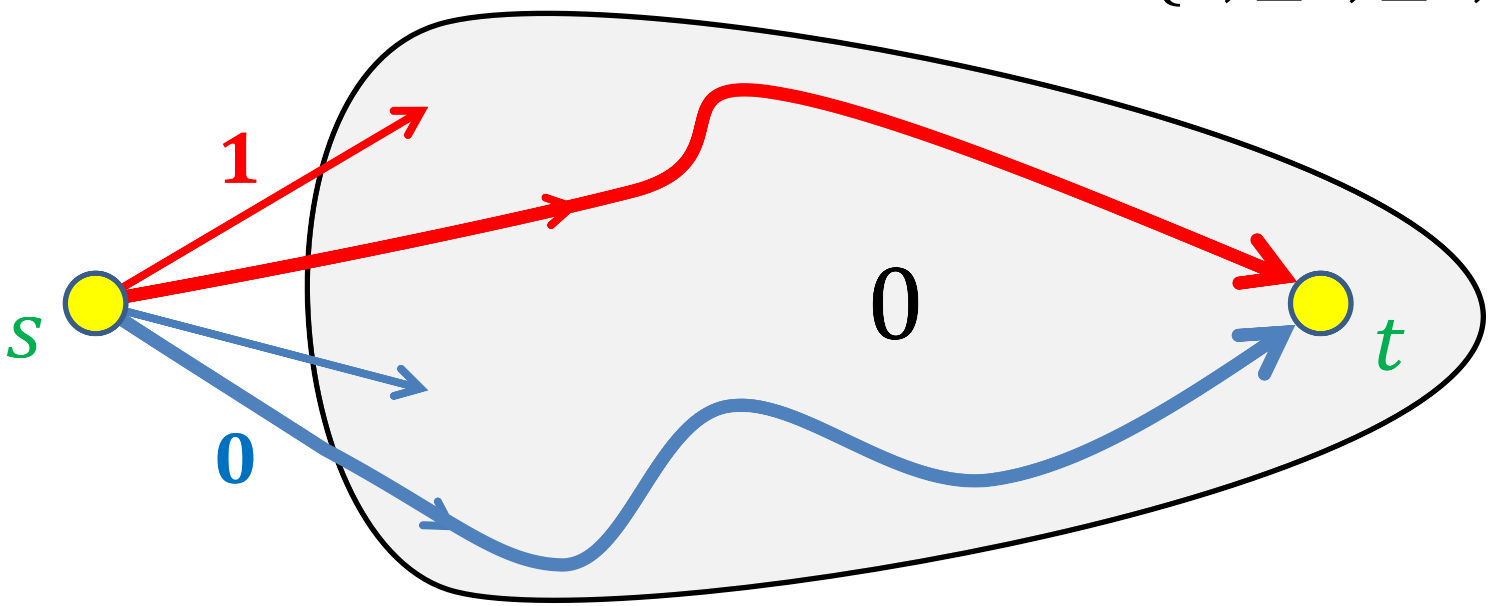
$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$



$l = \{0, 1\}$

例1

$\mathbf{Z}$ラベル付きグラフ
$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

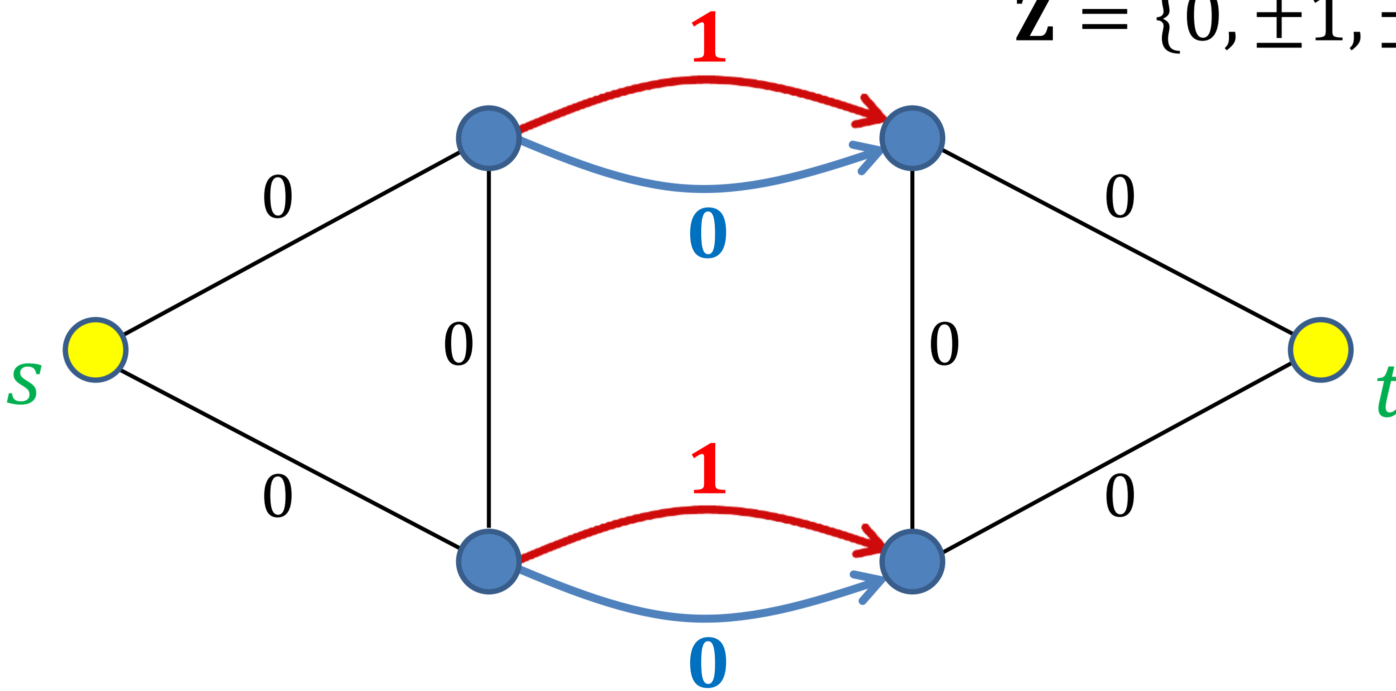


$l = \{0, 1\}$

例2

Zラベル付きグラフ

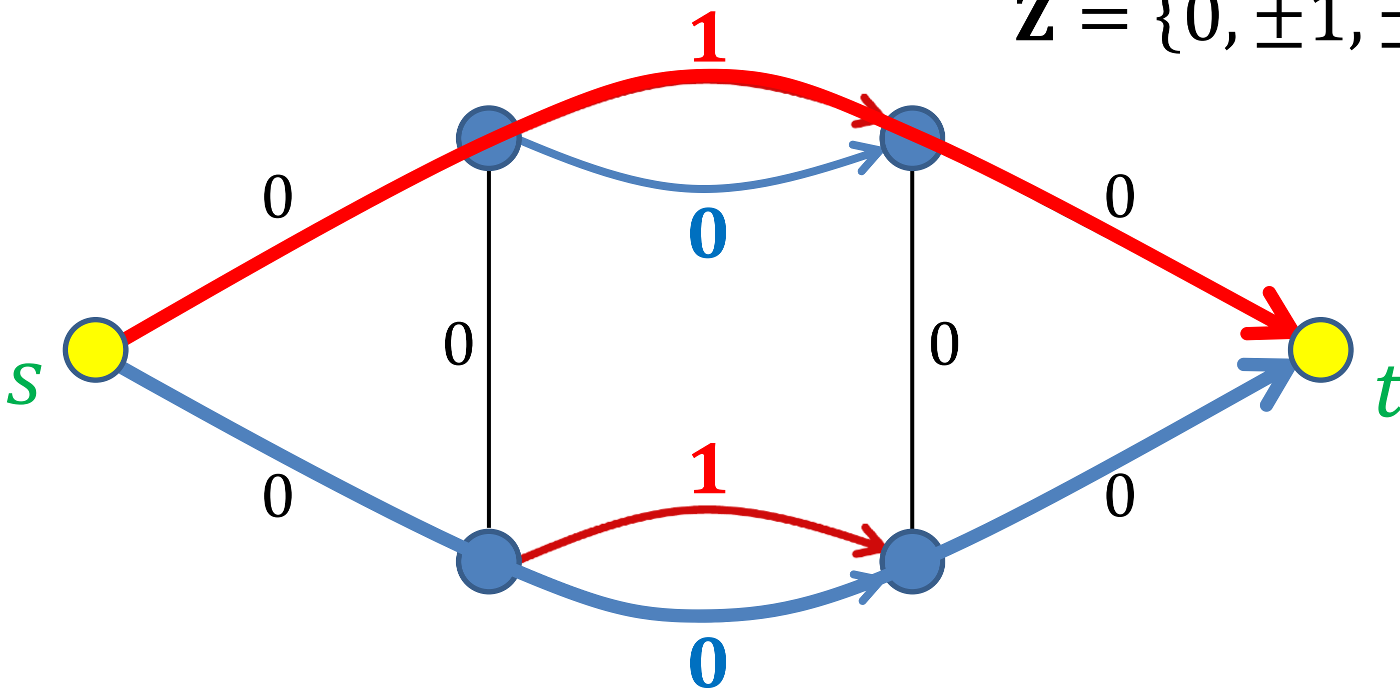
$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$



$l = \{0, 1\}$

例2

$\mathbf{Z}$ラベル付きグラフ
$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

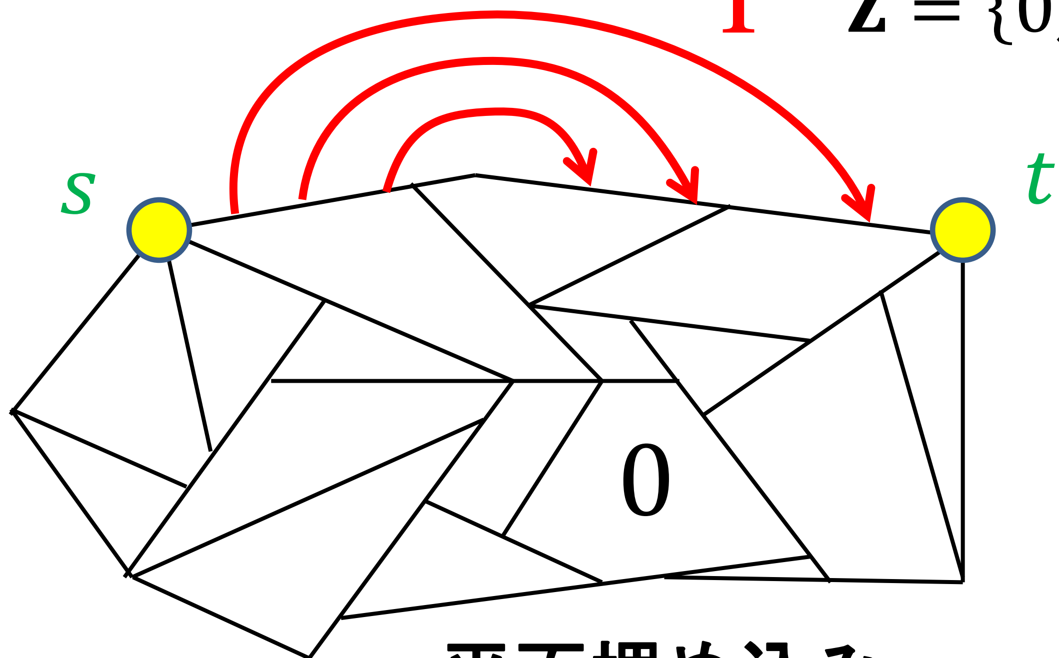


$l = \{0, 1\}$

例3

$\mathbf{Z}$ラベル付きグラフ

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$



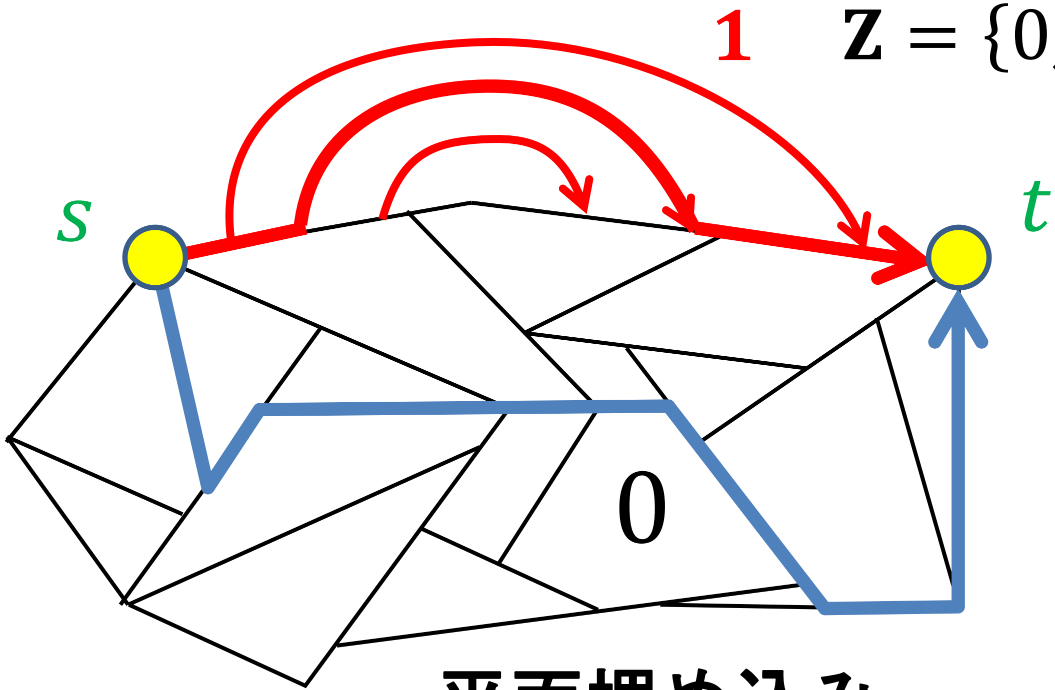
平面埋め込み

$$l = \{0, 1\}$$

例3

$\mathbf{Z}$ラベル付きグラフ

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

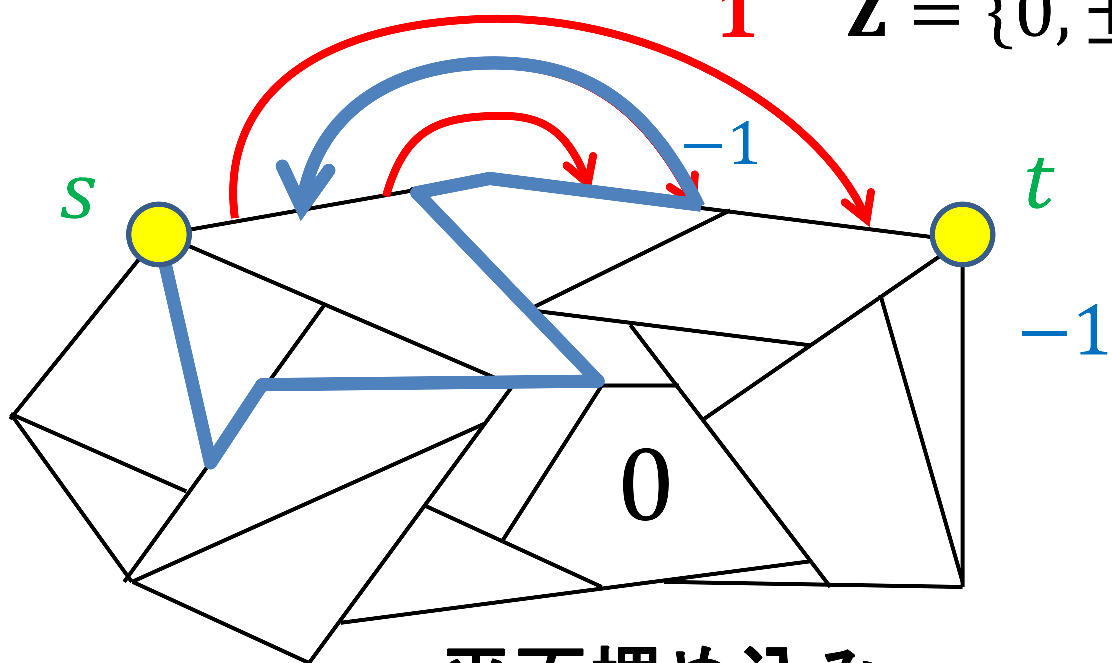


平面埋め込み

$l = \{0, 1\}$

例3

$\mathbf{Z}$ラベル付きグラフ
$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$



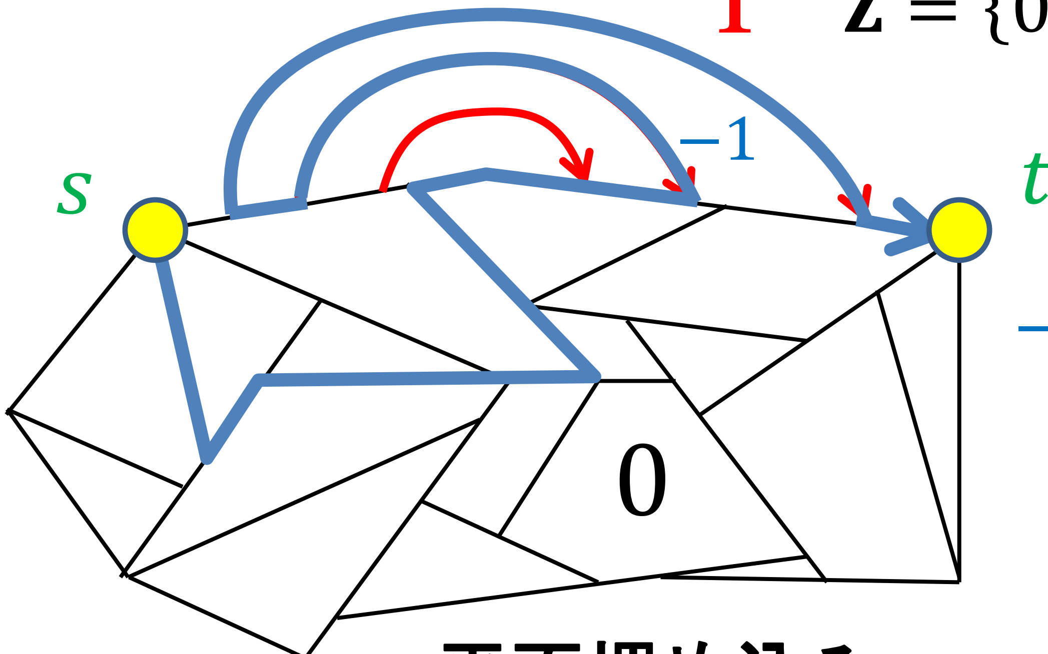
平面埋め込み

$l = \{0, 1\}$

例3

Zラベル付きグラフ

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$



$-1 + 1 = 0$

平面埋め込み

$l = \{0, 1\}$

主結果 (特徴付け)

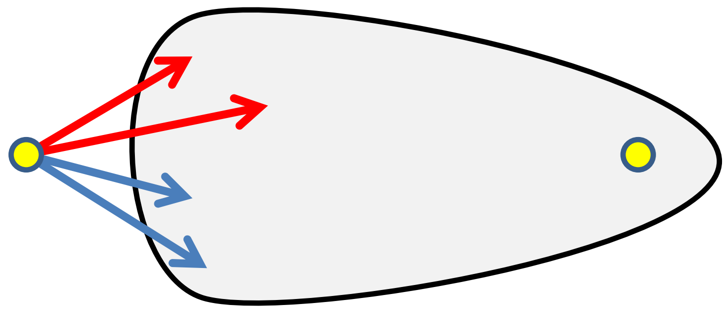
<u>定理</u>

$$\underline{l = \{\alpha, \beta\}}$$

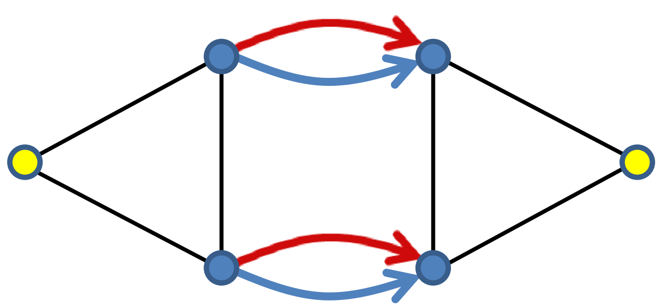
$$\Updownarrow$$

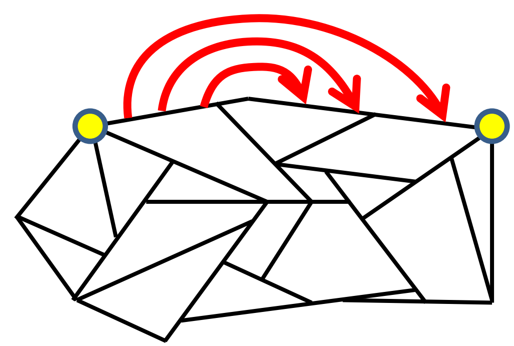
3つのケースのいずれかに<u>**帰着可能**</u>

[K.–K.–Y. 2015]



本質的





概要

定理 $l = \{\alpha, \beta\}$

$\Updownarrow$

3つのケースのいずれかに**帰着可能**

[K.–K.–Y. 2015]

群ラベル付きグラフにおいて,

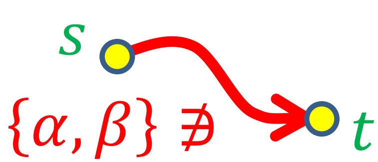
- 2点 s, t を結ぶパスの**取りうるラベル**が**ちょうど2種類**であるための**必要十分条件**を与え,
- それに基づき, **2ラベル禁止 s–t パス**を求める**多項式時間アルゴリズム**を提案した.

概要

2ラベル禁止 s–t パスの発見

2種類のラベル
(特徴付け)

多項式時間



[K.–K.–Y. 2015]

$l = \{\alpha,\beta\}$

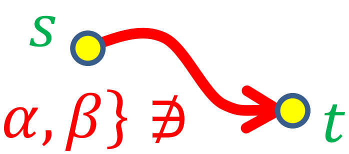
群ラベル付きグラフにおいて,

- 2点 s, t を結ぶパスの**取りうるラベル**が**ちょうど2種類**であるための**必要十分条件**を与え,
- それに基づき,**2ラベル禁止 s–t パス**を求める**多項式時間アルゴリズム**を提案した.

主結果 (アルゴリズム)

2ラベル禁止 s–t パスの発見 ⇠ **2種類のラベル** (特徴付け)

多項式時間



$\{\alpha, \beta\} \not\ni$

[K.–K.–Y. 2015]

$l = \{\alpha, \beta\}$

- $l \subseteq \{\alpha, \beta\}$ かどうかを判定 (**特徴付け**に基づく)

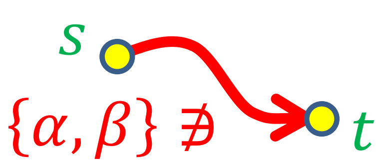
cf. $l = \{\alpha\}$ は簡単

主結果 (アルゴリズム)

2ラベル禁止 s–t パスの発見

2種類のラベル
(特徴付け)

多項式時間



[K.–K.–Y. 2015]

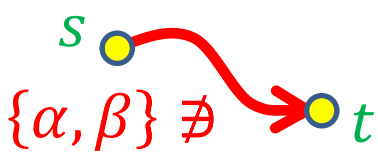
$l = \{\alpha, \beta\}$

- $l \subseteq \{\alpha, \beta\}$ かどうかを判定 (**特徴付け**に基づく)
- $l \subseteq \{\alpha, \beta\} \rightarrow$ 目的のパスは**存在しない**

主結果 (アルゴリズム)

2ラベル禁止 s–t パスの発見 ⇠ **2種類のラベル** (特徴付け)

多項式時間



[K.–K.–Y. 2015]

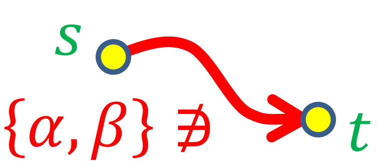
$l = \{\alpha,\beta\}$

- $l \subseteq \{\alpha,\beta\}$ かどうかを判定 (**特徴付け**に基づく)
- $l \subseteq \{\alpha,\beta\}$ $\rightarrow$ 目的のパスは**存在しない**
- $l \not\subseteq \{\alpha,\beta\}$ $\rightarrow$ $\exists\gamma \in l \setminus \{\alpha,\beta\}$

主結果 (アルゴリズム)

2ラベル禁止 s–t パスの発見 ⟵ **2種類のラベル** (特徴付け)

多項式時間



[K.–K.–Y. 2015]

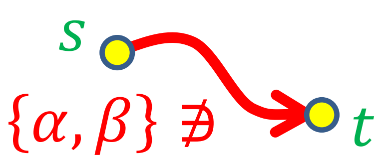
$l = \{\alpha, \beta\}$

- $l \subseteq \{\alpha, \beta\}$ かどうかを判定 (**特徴付け**に基づく)
- $l \subseteq \{\alpha, \beta\}$ $\rightarrow$ 目的のパスは**存在しない**
- $l \not\subseteq \{\alpha, \beta\}$ $\rightarrow$ $\exists \gamma \in l \setminus \{\alpha, \beta\}$
  - $|l| \leq 2$ $\rightarrow$ 取りうる**すべて**のラベル
  - $|l| \geq 3$ $\rightarrow$ **3種類**の異なるラベル

動機・アイデア

2ラベル禁止 s–t パスの発見 ⇠ **2種類のラベル** (特徴付け)

多項式時間



[K.–K.–Y. 2015]

$l = \{\alpha, \beta\}$

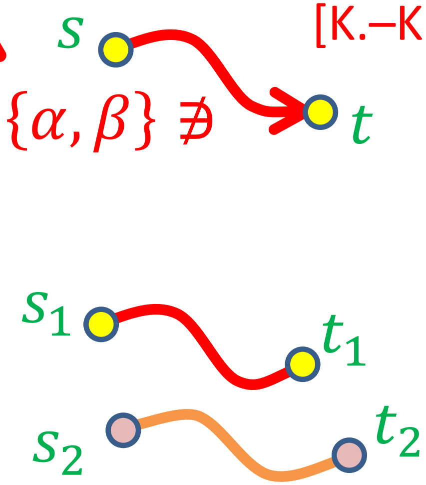
なんで？

動機・アイデア

2ラベル禁止 s–t パスの発見

多項式時間

[K.–K.–Y. 2015]



2種類のラベル
(特徴付け)

$l = \{\alpha, \beta\}$

一般化

一般化

2点素パスの発見

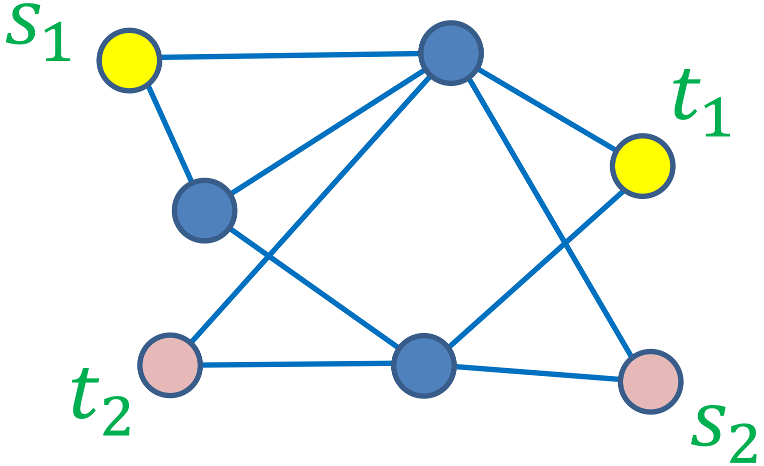
多項式時間

2点素パスの有無
(特徴付け)

[Seymour 1980,
Shiloach 1980,
Thomassen 1980]

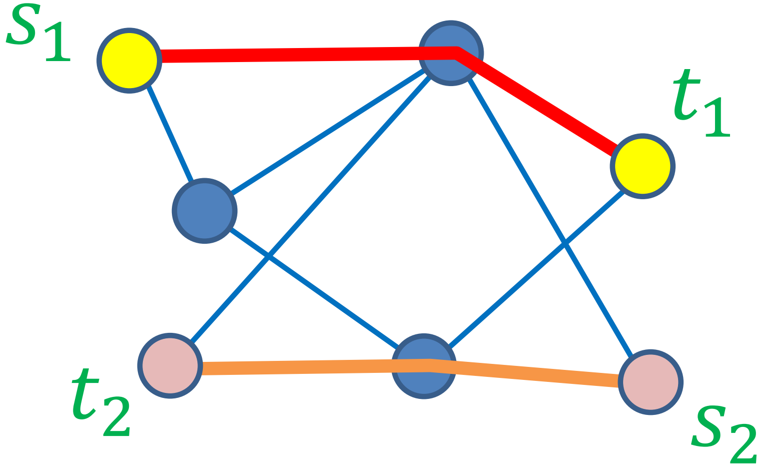
2点素パスの一般化

無向グラフ



2点素パスの一般化

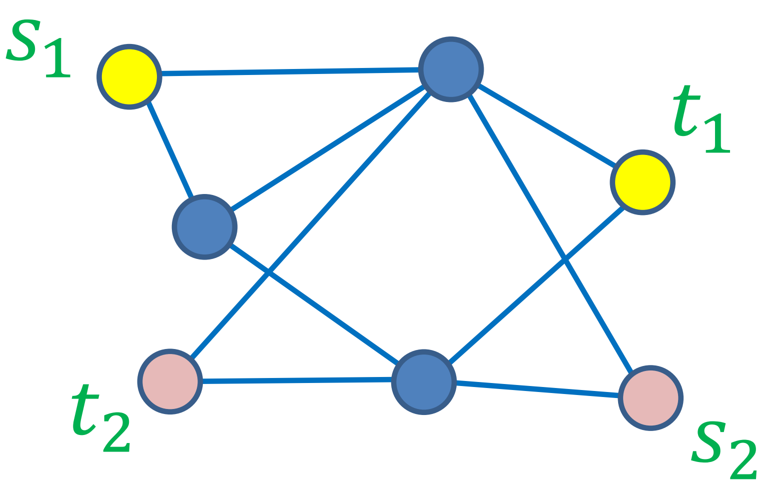
無向グラフ



2点素パス

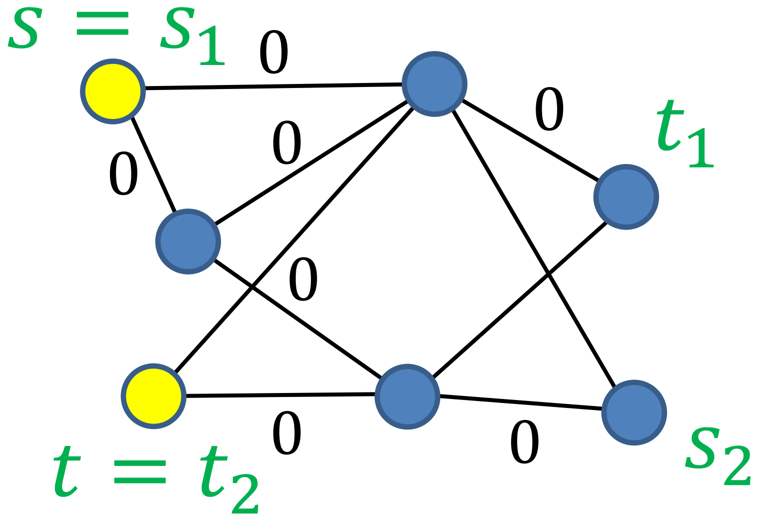
2点素パスの一般化

無向グラフ



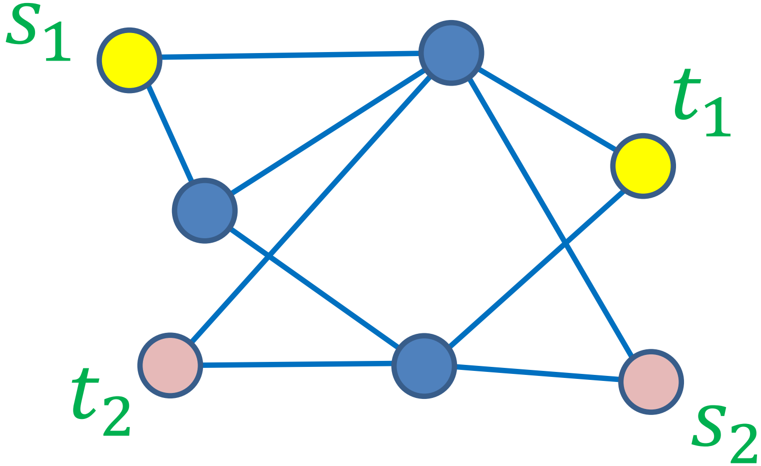
$\mathbf{Z}_3$ラベル付きグラフ

$\mathbf{Z}_3 = \{-1, 0, 1\}$



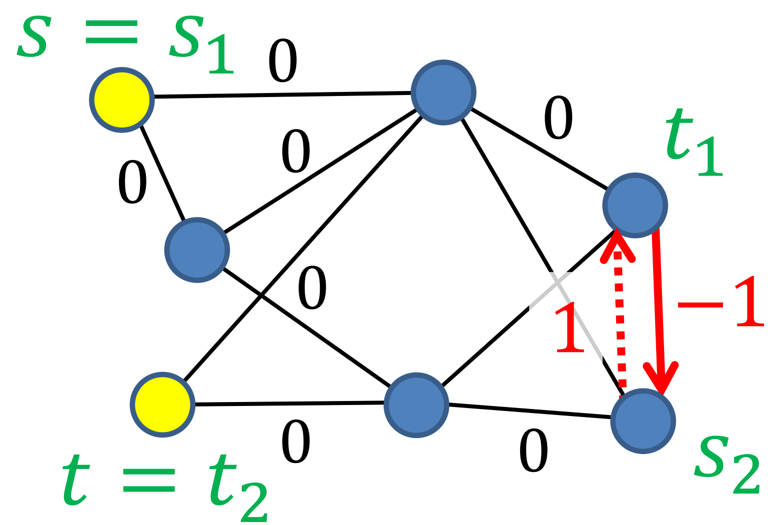
2点素パスの一般化

無向グラフ



$\mathbf{Z}_3$ラベル付きグラフ

$\mathbf{Z}_3 = \{-1, 0, 1\}$

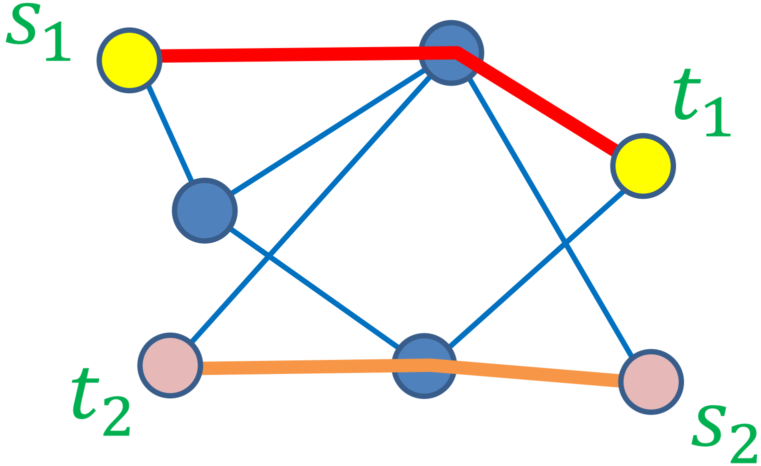


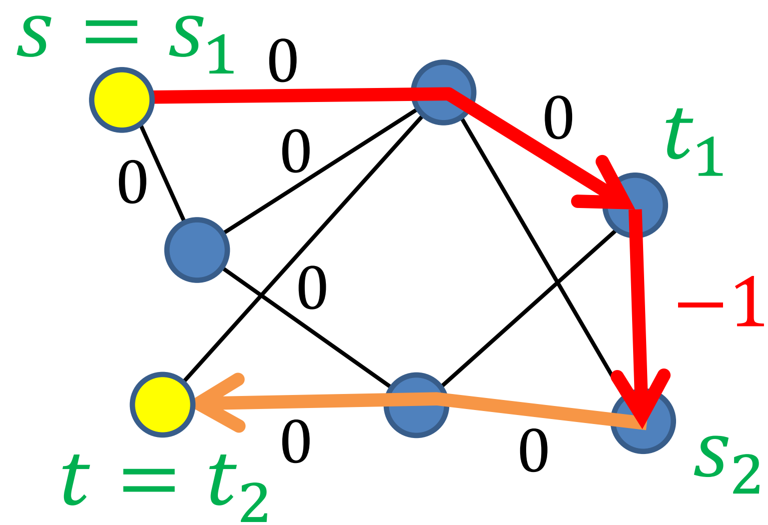
2点素パスの一般化

無向グラフ

$\mathbf{Z}_3$ラベル付きグラフ

$\mathbf{Z}_3 = \{-1, 0, 1\}$

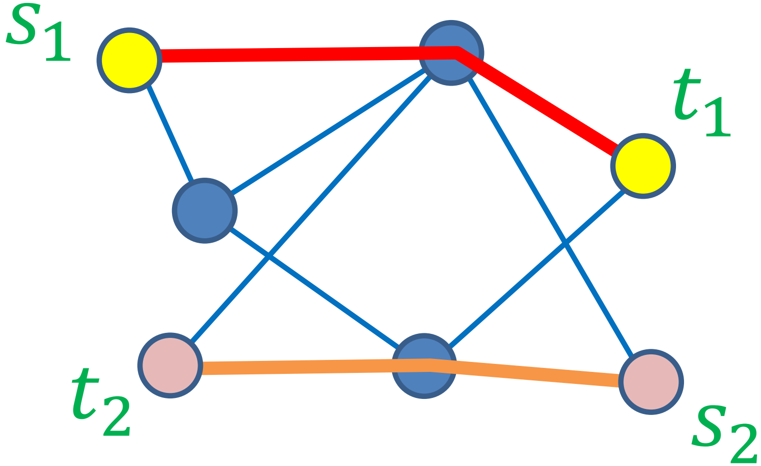




2点素パス ⇔ ラベル -1

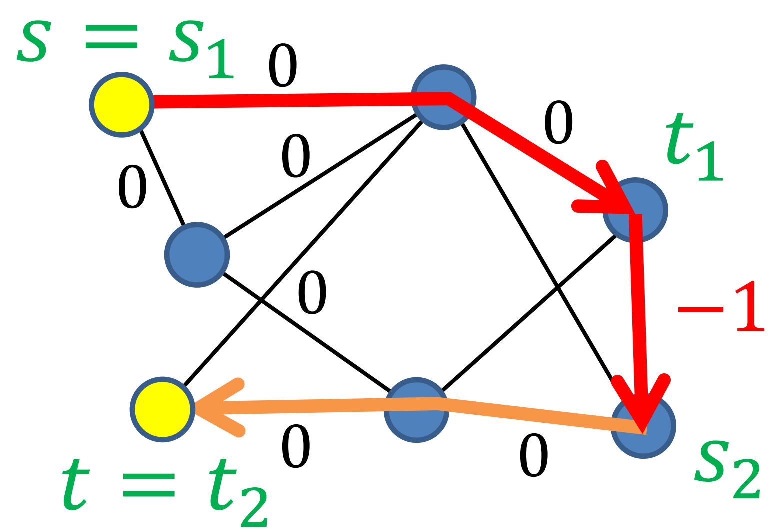
2点素パスの一般化

無向グラフ



$\mathbf{Z}_3$ラベル付きグラフ

$\mathbf{Z}_3 = \{-1, 0, 1\}$



2点素パス $\Leftrightarrow$ ラベル -1

$\Leftrightarrow$ <u>0でも1でもない</u>

動機・アイデア

2ラベル禁止 s–t パスの発見

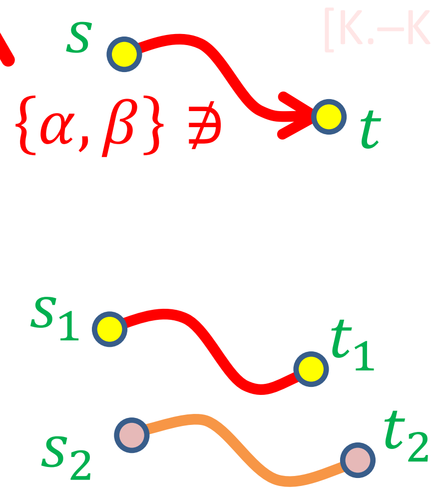
多項式時間

[K.–K.–Y. 2015]

2種類のラベル
(特徴付け)

$l = \{\alpha, \beta\}$

一般化



一般化

2点素パスの発見

多項式時間

[Seymour 1980,
Shiloach 1980,
Thomassen 1980]

2点素パスの有無
(特徴付け)

動機・アイデア

2ラベル禁止 s–t パスの発見

多項式時間

[K.–K.–Y. 2015]

一般化

2点素パスの発見

多項式時間

[Seymour 1980, Shiloach 1980, Thomassen 1980]

2種類のラベル
(特徴付け)

$l = \{\alpha, \beta\}$

一般化

2点素パスの有無
(特徴付け)

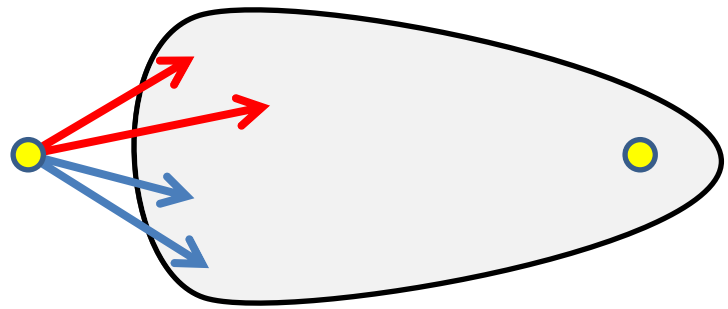
主結果 (特徴付け)

定理 $\underline{l = \{\alpha, \beta\}}$

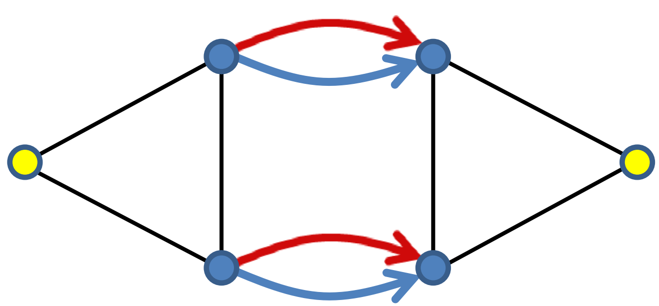
$\Updownarrow$

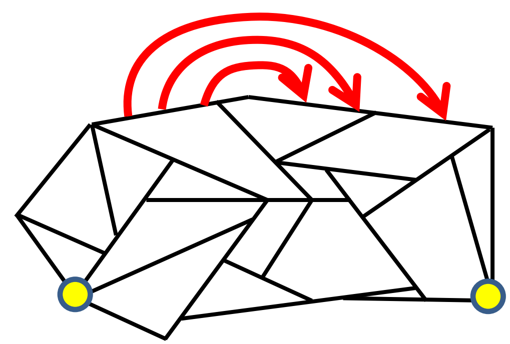
3つのケースのいずれかに**帰着可能**

[K.–K.–Y. 2015]



本質的





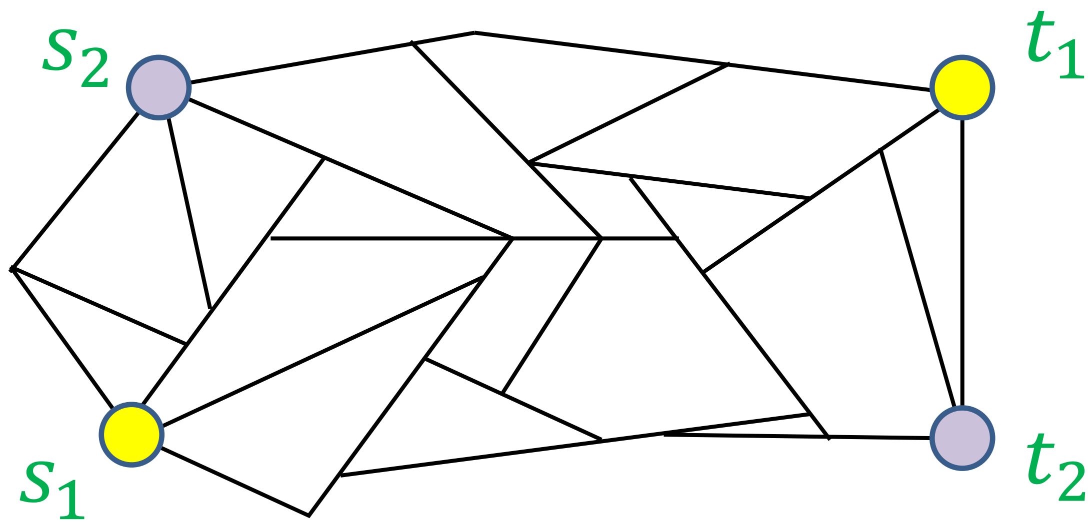
2点素パスに対する特徴付け

定理　点素 s_1–t_1, s_2–t_2 パスが**ない**

⇕

ある種の**平面グラフ**に帰着可能

[Seymour 1980]



本質的

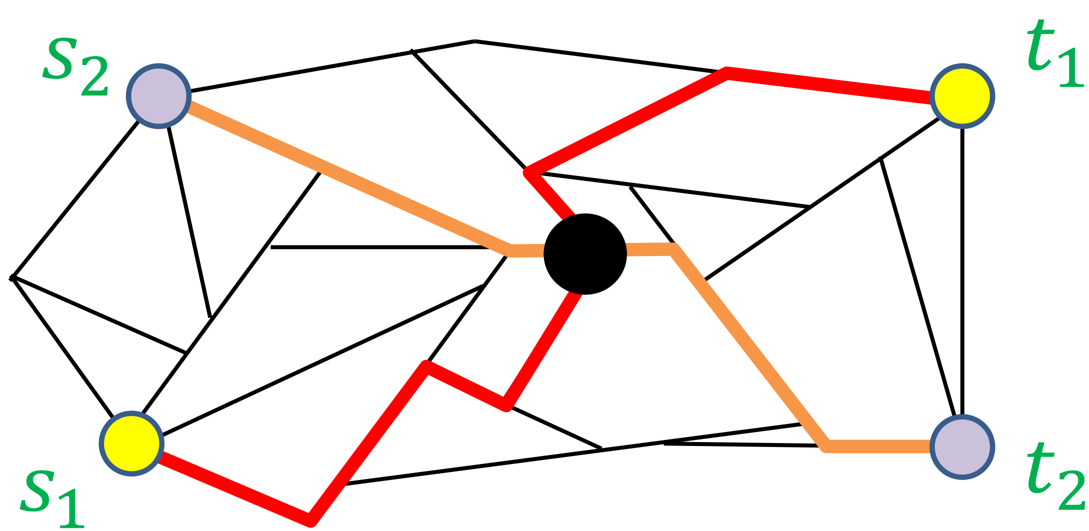
2点素パスに対する特徴付け

<u>定理</u>　点素 s_1–t_1, s_2–t_2 パスが**<u>ない</u>**

$\Updownarrow$

ある種の**<u>平面グラフ</u>**に帰着可能

[Seymour　1980]



本質的

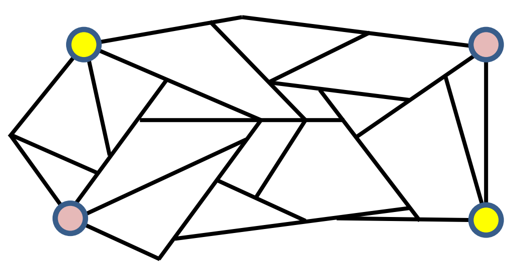
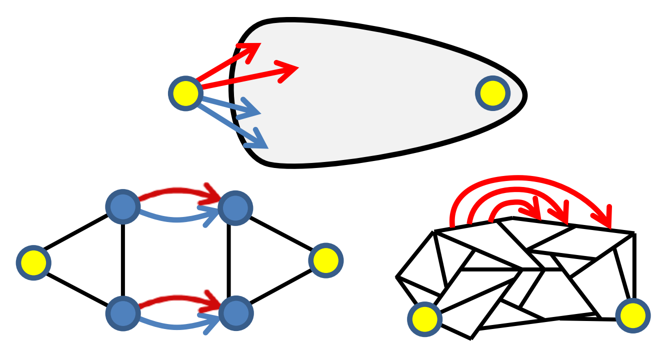
特徴付けの対比

<u>定理</u>　点素 s_1–t_1, s_2–t_2 パスが**<u>ない</u>**

⇕

ある種の**<u>平面グラフ</u>**に帰着可能

[Seymour 1980]

	2点素パスなし [Seymour 1980]	ちょうど2種類のラベル [K.–K.–Y. 2015]
本質的ケース	平面埋め込み 	

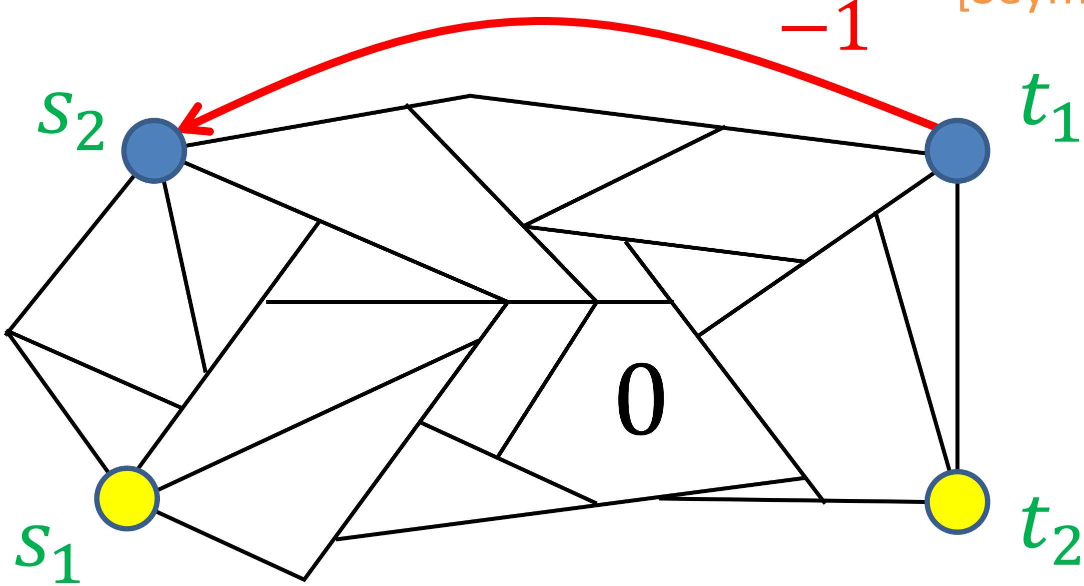
2点素パスに対する特徴付け

定理　点素 s_1–t_1, s_2–t_2 パスが**ない**

⇕

ある種の**平面グラフ**に帰着可能

[Seymour 1980]



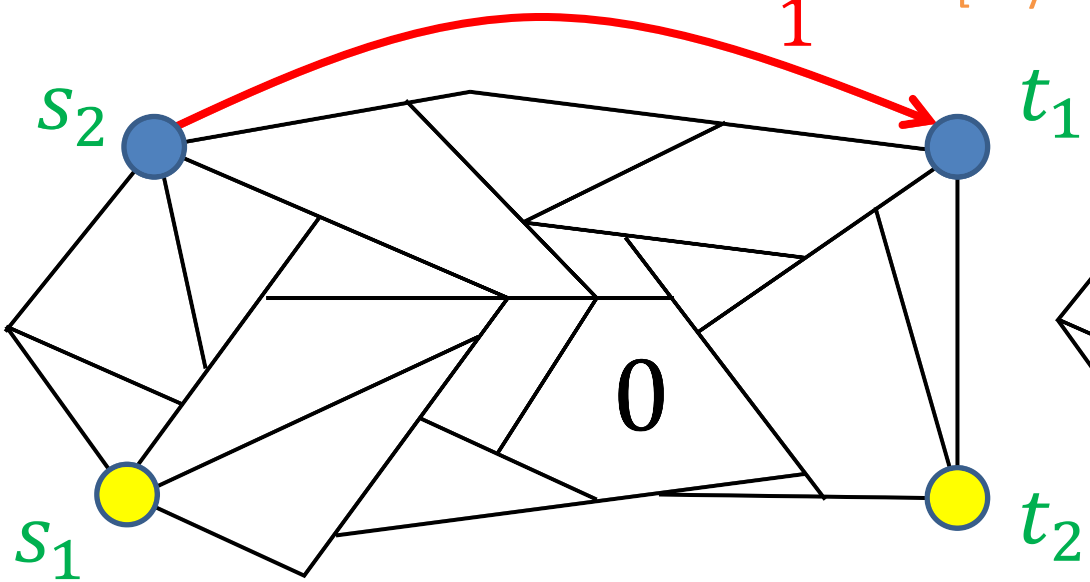
2点素パスに対する特徴付け

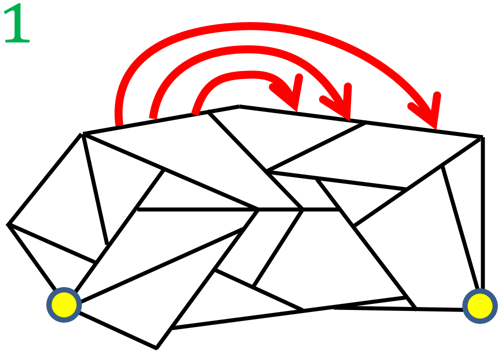
定理　点素 s_1–t_1, s_2–t_2 パスが**ない**

⇕

ある種の**平面グラフ**に帰着可能

[Seymour 1980]





$l = \{0, 1\}$

2点素パスに対する特徴付け

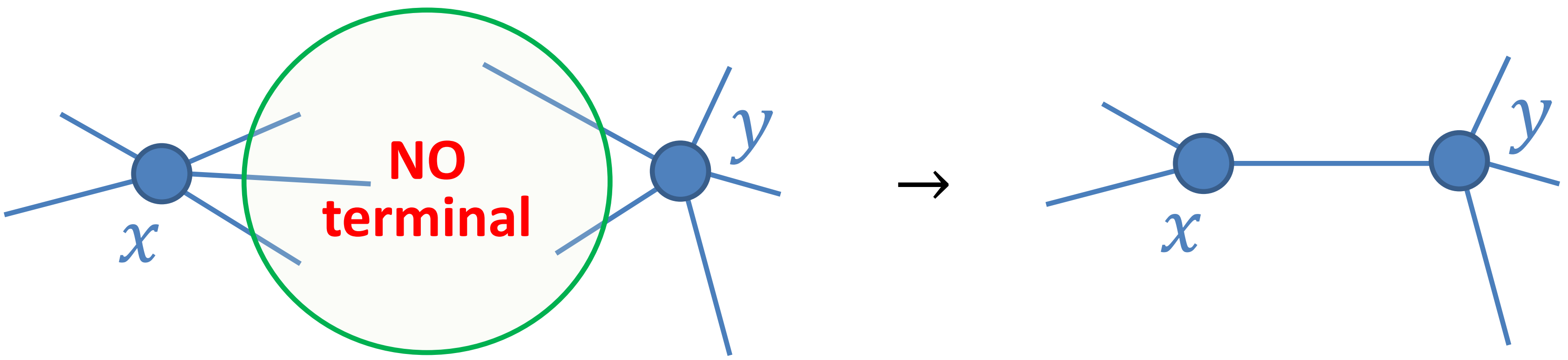
<u>定理</u>　点素 s_1–t_1, s_2–t_2 パスが<u>**ない**</u>

$\Updownarrow$

ある種の<u>**平面グラフ**</u>に<u>**帰着可能**</u>

[Seymour 1980]

<u>**2点カットの縮約**</u>



2点素パスに対する特徴付け

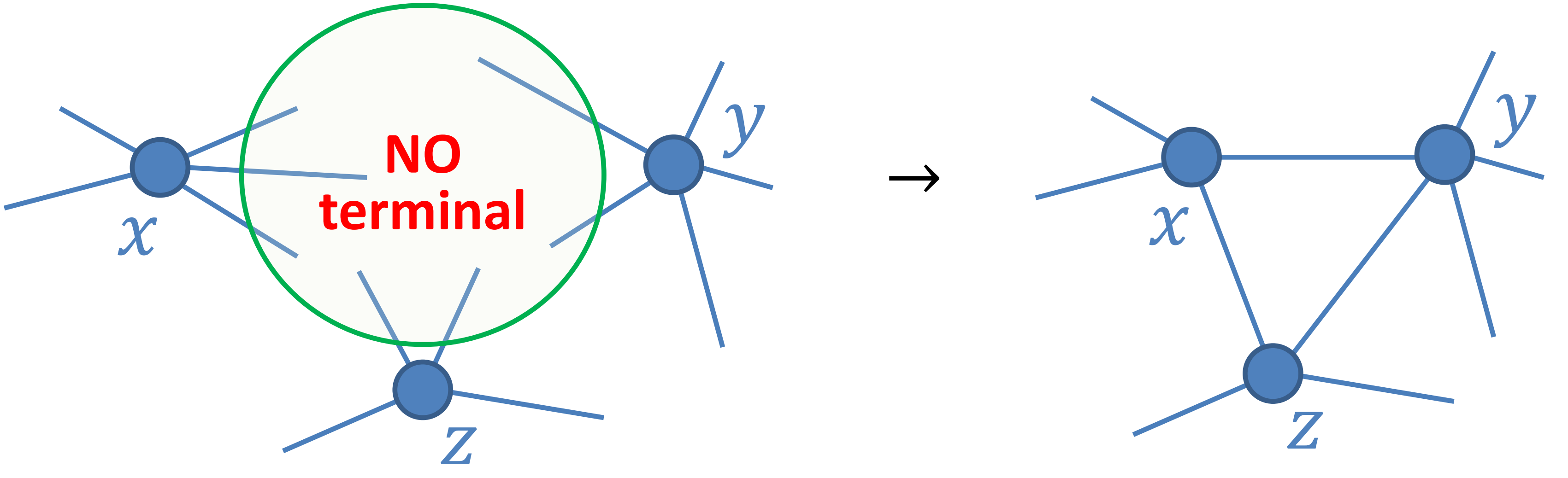
定理　点素 s_1–t_1, s_2–t_2 パスが**ない**

⇕

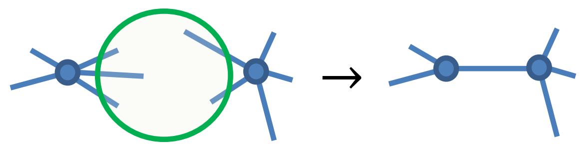
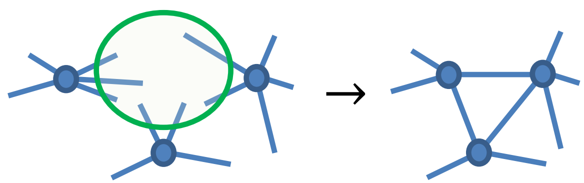
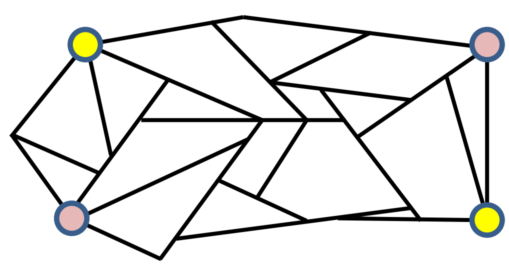
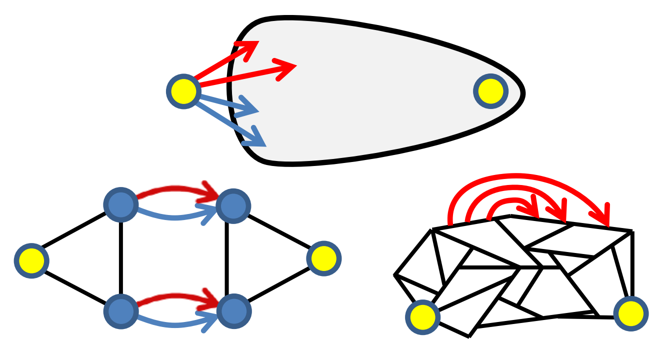
ある種の**平面グラフ**に**帰着可能**

[Seymour 1980]

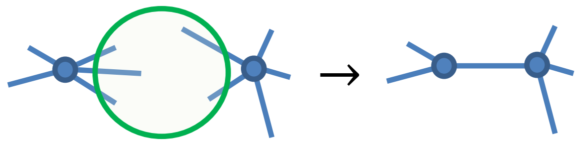
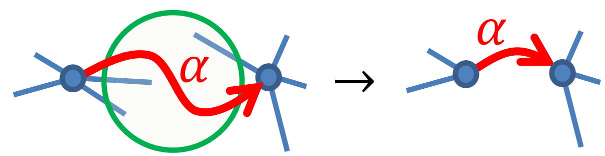
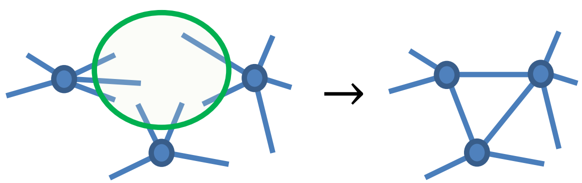
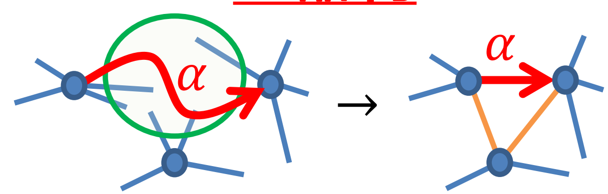
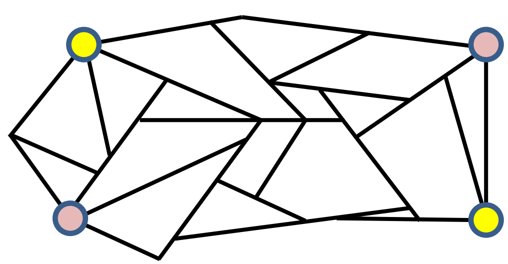
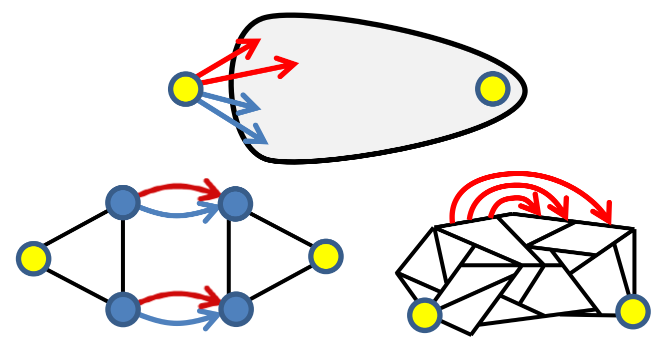
3点カットの縮約



特徴付けの対比

	2点素パスなし [Seymour 1980]	ちょうど2種類のラベル [K.–K.–Y. 2015]
縮小操作	2点カットの縮約 	
	3点カットの縮約 	
本質的ケース	平面埋め込み 	

特徴付けの対比

	2点素パスなし [Seymour 1980]	ちょうど2種類のラベル [K.–K.–Y. 2015]
縮小操作	2点カットの縮約 	<u>2-縮約</u> 
	3点カットの縮約 	<u>3-縮約</u> 
本質的ケース	平面埋め込み 	

まとめ

- s–t パスの取りうるラベルが**ちょうど2種類**であるような群ラベル付きグラフの**特徴付け**
  - **多項式時間で判定可能**
  - 2**点素パス**に対する特徴付け [Seymour 1980] の拡張
- **2ラベル禁止** s–t パス発見**アルゴリズム**
  - **多項式時間**
  - 群に依存しない
    (無限群・非可換群でもOK
    ただし，群に関する操作は基本演算とする)