

ERATO感謝祭 Season II 2015.8.4

Lagrangian Decomposition Algorithm for Allocating Marketing Channels (AAAI'15)

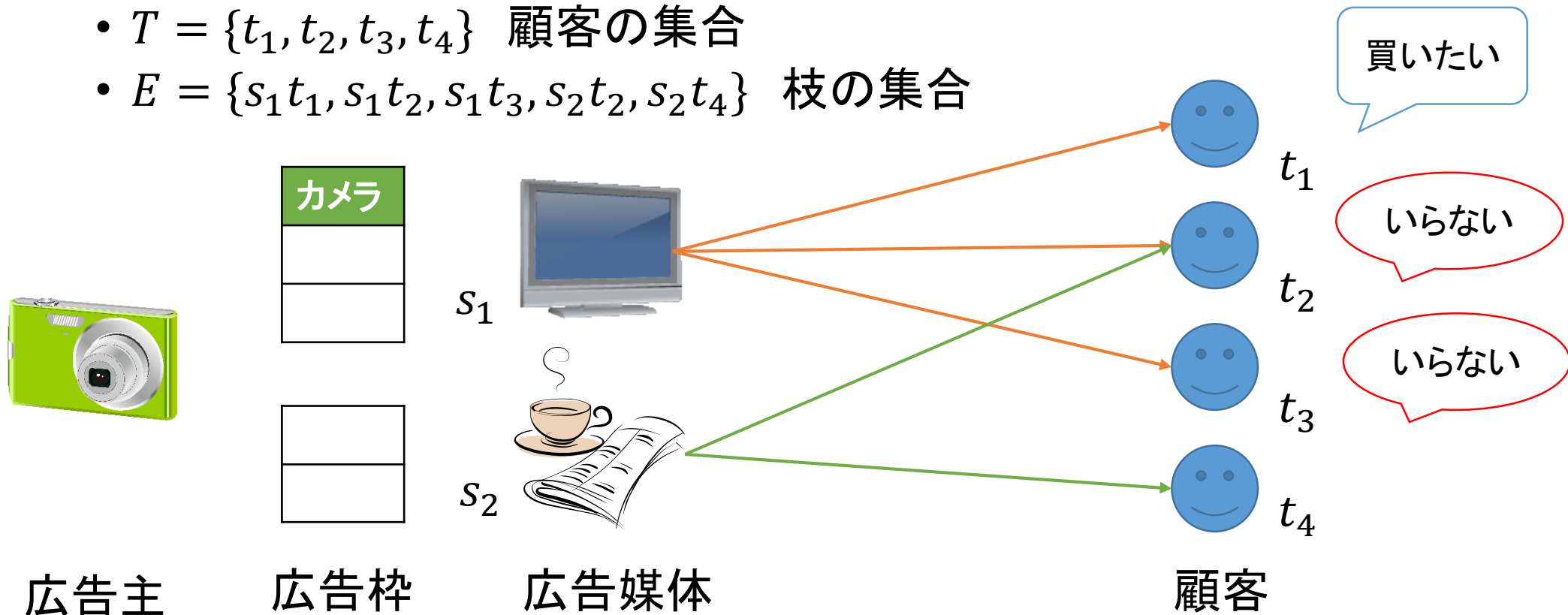
波多野 大督

(Joint work with 福永拓郎, 前原貴憲, 河原林健一)

背景：広告予算の最適配分

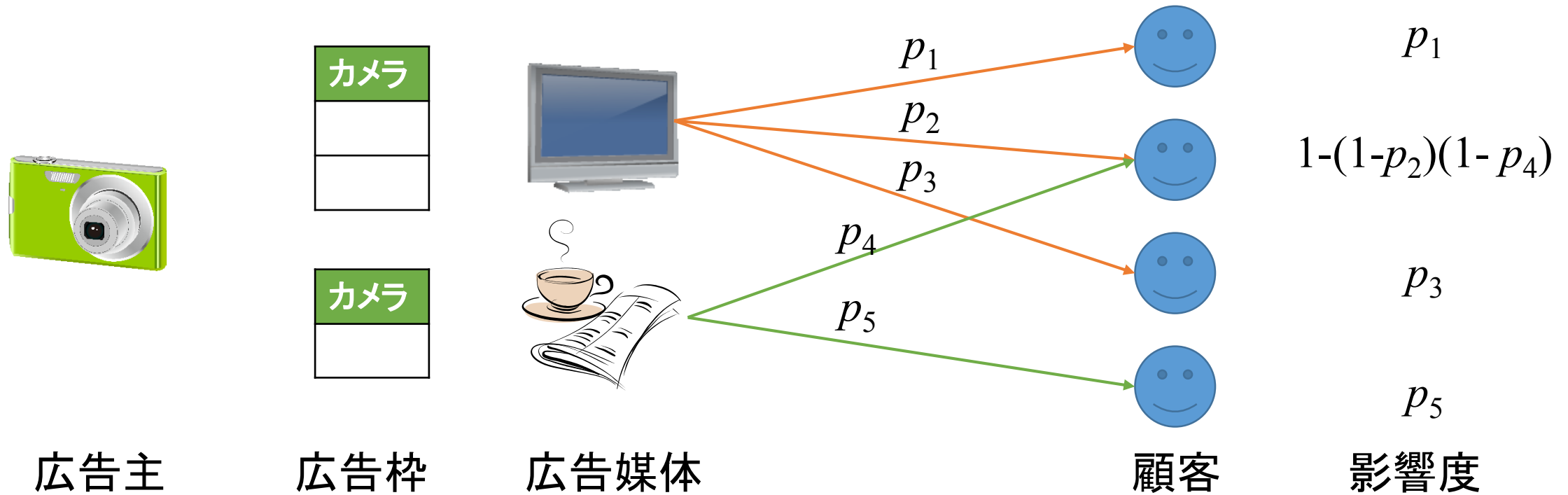
- 二部グラフ: $(S, T; E)$

- $S = \{s_1, s_2\}$ 広告媒体の集合
- $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ 顧客の集合
- $E = \{s_1t_1, s_1t_2, s_1t_3, s_2t_2, s_2t_4\}$ 枝の集合



背景：広告予算の最適配分

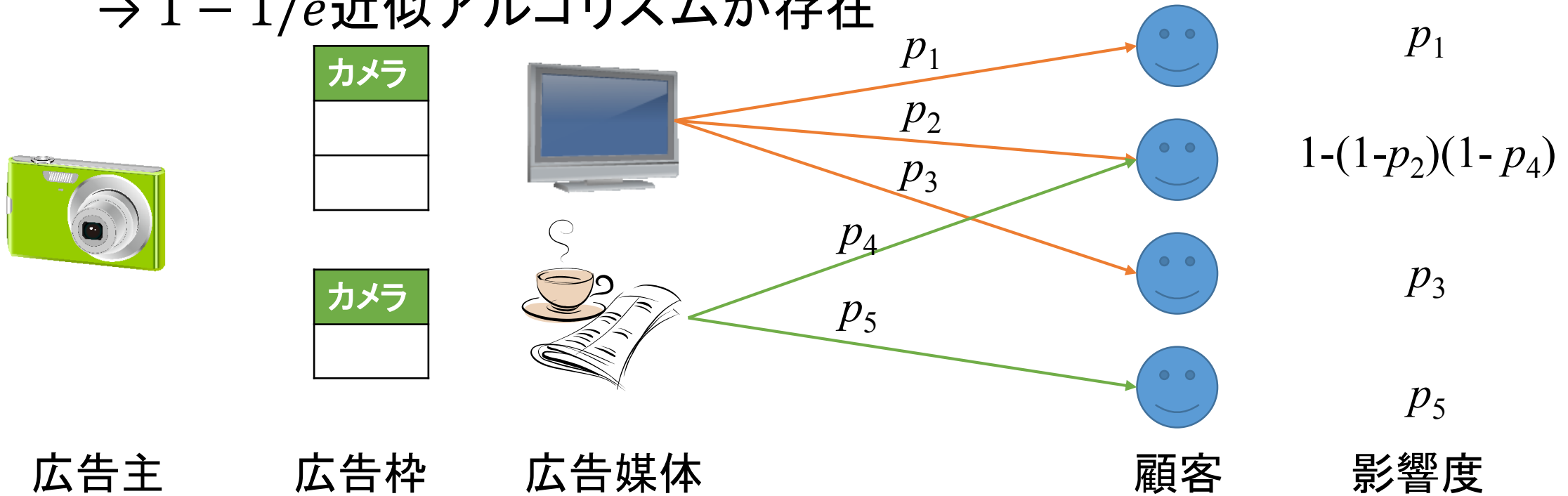
- 目的：限られた予算内で**影響度を最大**にする予算配分 x を探索



$$f(x_i) = \sum_{t \in T} \left\{ 1 - \prod_{st \in E} (1 - p(st))^{x_i(st)} \right\}$$

背景：広告予算の最適配分

- $f(x_i)$ は限界効用逓減性を満たす劣モジュラ関数
→ $1 - 1/e$ 近似アルゴリズムが存在



$$f(x_i) = \sum_{t \in T} \left\{ 1 - \prod_{st \in E} (1 - p(st))^{x_i(st)} \right\}$$

貢献

- 新しい問題を提案
 - 複数の広告主が存在 ← 広告枠を平等に割り当てたい
 - マッチメイカーの導入
- 提案問題が限界効用逓減性を満たすことを証明
- ラグランジュ分解に基づく解法を提案
 - 並列化による高速化
 - 実験結果より最大で12%程度の改善が見られた

提案問題

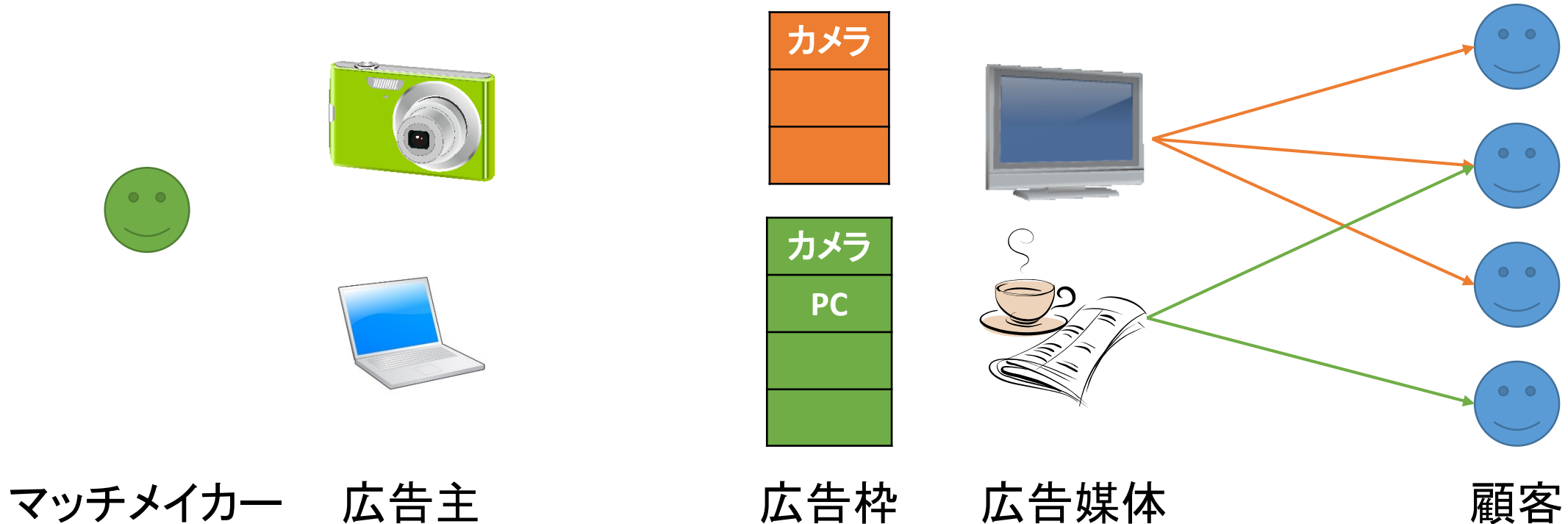
- 一般的には**複数の広告主**が存在する
- 問題点: 一人の広告主に広告媒体が偏る可能性がある
- 適切に広告の枠を広告主に振り分ける**マッチメイカー**が必要



提案問題

$$\sum_{i=1}^k x_i(s) \leq c(s) \quad \forall s \in S$$

- 制約1: 容量制約
 - 各広告媒体 s には広告枠の数に制限 $c(s)$ がある

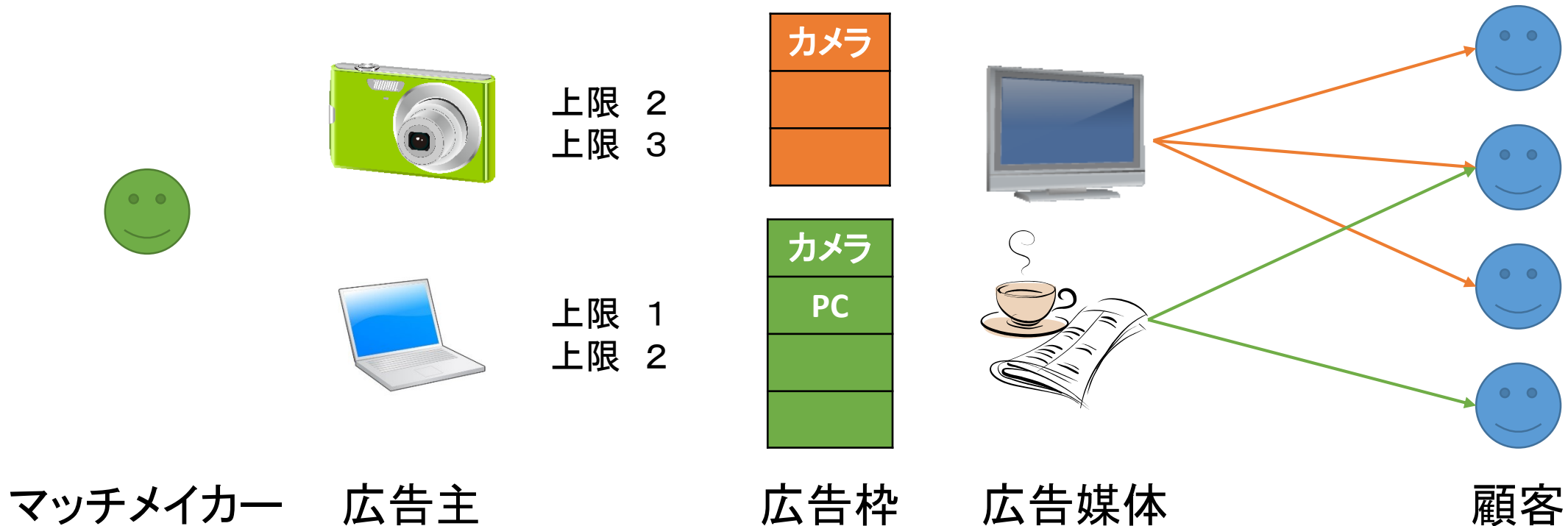


提案問題

$$x_i(s) \leq u_i(s) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall s \in S$$

- 制約 2: 上限制約

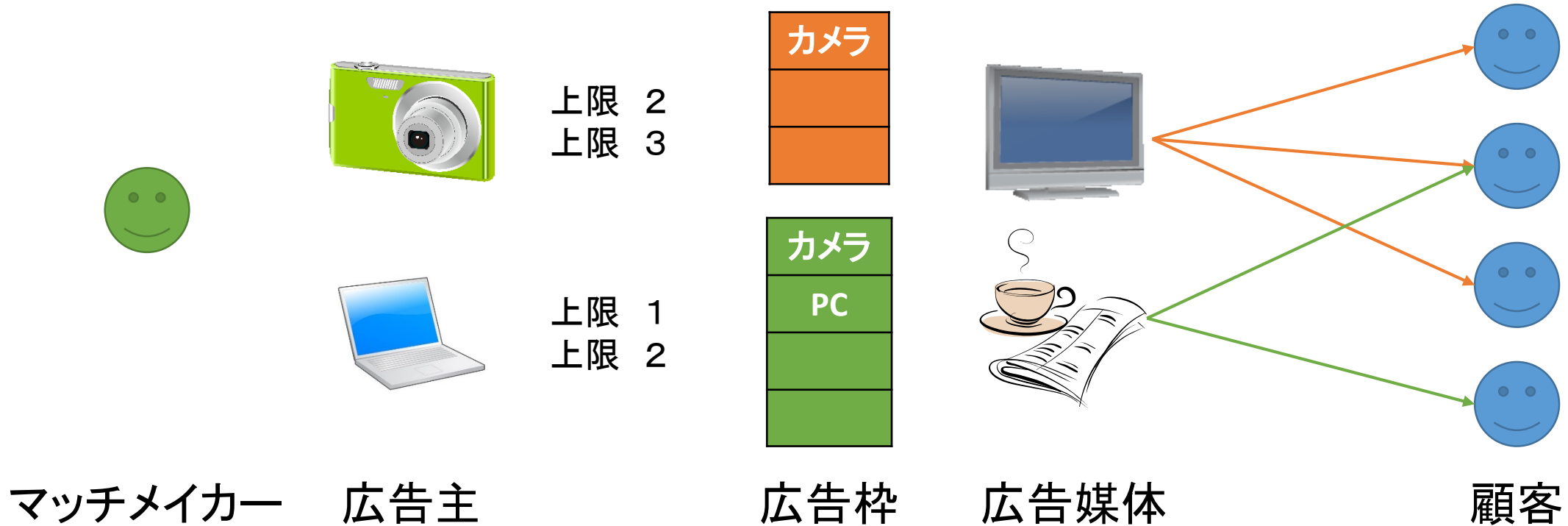
- 広告主 i は各広告媒体 s に対し使用可能な広告枠の上限 $u_i(s)$ がある



提案問題

$$\sum_{i=1}^k \min \{f_i(x_i), \theta_i\}$$

- 目的関数
 - 広告主 i に対して目標影響度 θ_i を設定



提案問題

- まとめると

$$\max. \quad \sum_{i=1}^k \min \{f_i(x_i), \theta_i\}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^k x_i(s) \leq c(s) \quad \forall s \in S,$$

$$x_i(s) \leq u_i(s)$$

$$\forall s \in S, \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

問題の性質

- 限界効用逓減性をもつ
- Continuous greedy algorithm(により最適解に対して $1 - 1/e (> 0.63)$ 倍の解を得られることが保証
→非常に時間がかかる



なんとかしよう！

提案アルゴリズムのアイデア

- 問題を分解できれば既存の研究が使用できそう

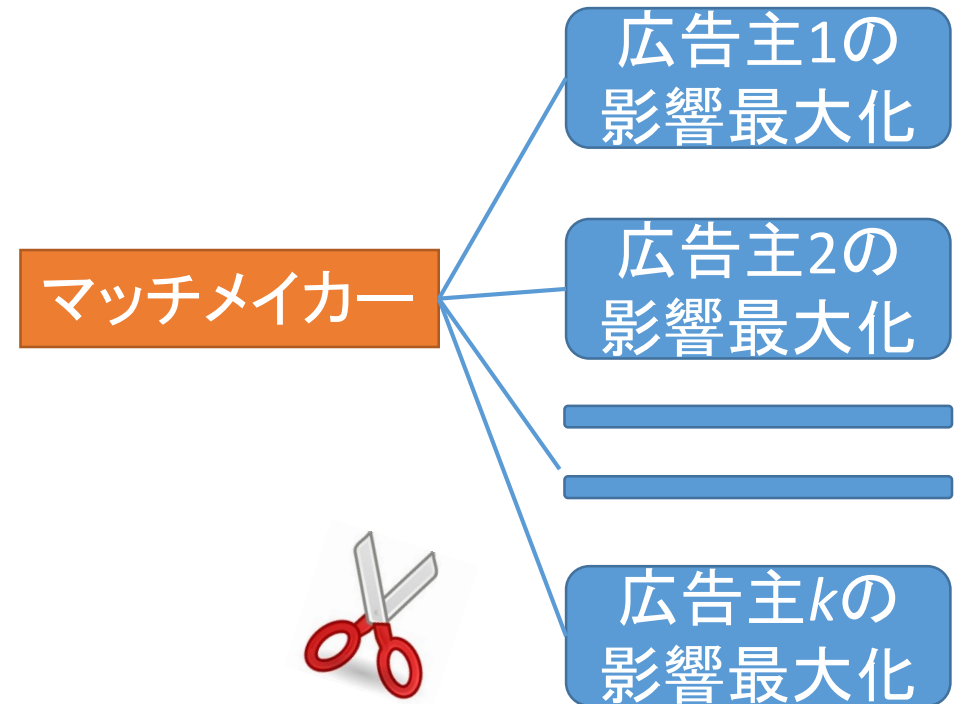
- 広告主の間にまたがる制約

$$\sum_{i=1}^k x_i(s) \leq c(s) \quad \forall s \in S,$$

が邪魔！

- ラグランジュ分解をしよう！！

構造がありそう？



バラバラにできないか!?

提案アルゴリズム

• 流れ

1. 分解プロセス

- ラグランジュ緩和
部分問題に分解

2. 調整プロセス

ラグランジュ乗数の最適化

- 劣勾配法
 - ラグランジュ乗数を固定し
部分問題の解を求める
 - 求めた解を基にラグラン
ジュ乗数を更新

• 特徴

• 弱双対定理:

ラグランジュ双対問題から得られる解は必ず原問題の最適解に対する下界になる

- あるラグランジュ乗数のもと、双対問題を最適に解いた結果、緩和した制約を満たしていた場合、その解は原問題の最適解である

提案アルゴリズム

- 一部の変数を y に置き換えることで



マッチメイカーの部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & 0 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^k y_i(s) \leq c(s) \quad \forall s \in S, \\ & y_i \leq u_i \quad \forall i \in \{1,2\}. \end{aligned}$$

$$x_1 = y_1$$

$$x_2 = y_2$$



広告主 1 の部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & \min\{f_1(x_1), \theta_1\} \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq u_1 \end{aligned}$$



広告主 2 の部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & \min\{f_2(x_2), \theta_2\} \\ \text{s.t.} \quad & x_2 \leq u_2 \end{aligned}$$

提案アルゴリズム

- ペナルティ λ を導入し、制約を緩和



マッチメイカーの部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & 0 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^k y_i(s) \leq c(s) \quad \forall s \in S, \\ & y_i \leq u_i \quad \forall i \in \{1,2\}. \end{aligned}$$

ペナルティ
(ラグランジュ乗数)

$$\lambda_1(y_1 - x_1)$$

$$\lambda_2(y_2 - x_2)$$



広告主 1 の部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & \min\{f_1(x_1), \theta_1\} \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq u_1 \end{aligned}$$



広告主 2 の部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & \min\{f_2(x_2), \theta_2\} \\ \text{s.t.} \quad & x_2 \leq u_2 \end{aligned}$$

提案アルゴリズム

- 各部分問題にまたがる制約を緩和することで部分問題に分解



マッチメイカーの部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & \lambda_1^T y_1 + \lambda_2^T y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^k y_i(s) \leq c(s) \quad \forall s \in S, \\ & y_i \leq u_i \quad \forall i \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$



広告主 1 の部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & \min\{f_1(x_1), \theta_1\} - \lambda_1^T x_1 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq u_1 \end{aligned}$$



広告主 2 の部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & \min\{f_2(x_2), \theta_2\} - \lambda_2^T x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_2 \leq u_2 \end{aligned}$$

提案アルゴリズム

- 部分問題を解く



マッチメイカーの部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & \lambda_1^T y_1 + \lambda_2^T y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^k y_i(s) \leq c(s) \quad \forall s \in S, \\ & y_i \leq u_i \quad \forall i \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$



貪欲法で最適に解ける



広告主 1 の部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & \min\{f_1(x_1), \theta_1\} - \lambda_1^T x_1 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq u_1 \end{aligned}$$



貪欲法である程度解ける

提案アルゴリズム

- 劣勾配法: 最適なラグランジュ乗数(ペナルティ)を求める

ラグランジュ乗数の更新ルール

$$\begin{aligned}y - x < 0 &\rightarrow \lambda \text{ を増加} \\y - x > 0 &\rightarrow \lambda \text{ を減少} \\y - x = 0 &\rightarrow \lambda \text{ 変化なし}\end{aligned}$$



マッチメイカーの部分問題

$$\begin{aligned}\max. & \quad \lambda_1^T y_1 + \lambda_2^T y_2 \\ \text{s.t.} & \quad \sum_{i=1}^k y_i(s) \leq c(s) \quad \forall s \in S, \\ & \quad y_i \leq u_i \quad \forall i \in \{1, 2\}.\end{aligned}$$

λ を増加すると y が増加するかも



広告主 2の部分問題

$$\begin{aligned}\max. & \quad \min\{f_2(x_2), \theta_2\} - \lambda_2^T x_2 \\ \text{s.t.} & \quad x_2 \leq u_2\end{aligned}$$

λ を増加すると x が減少するかも

提案アルゴリズム

- 実行可能解を作る: マッチメイカーの意見に従う



マッチメイカーの部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & \lambda_1^T y_1 + \lambda_2^T y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^k y_i(s) \leq c(s) \quad \forall s \in S, \\ & y_i \leq u_i \quad \forall i \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

緩和した制約

$$x_1 = y_1$$

と

$$x_2 = y_2$$

を満たしたい



広告主 1の部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & \min\{f_1(x_1), \theta_1\} - \lambda_1^T x_1 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq u_1 \end{aligned}$$



広告主 2の部分問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & \min\{f_2(x_2), \theta_2\} - \lambda_2^T x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_2 \leq u_2 \end{aligned}$$

提案アルゴリズム:まとめ

- 問題にまたがる制約を緩和して部分問題に分解
 - 広告主の部分問題は劣モジュラのような構造をもつ
→貪欲法で効率的に良質な解が求められることを期待
 - マッチメイカーの部分問題は貪欲法で最適に解ける
- 最適なラグランジュ乗数を求める
 - 以下を繰り返す
 - ラグランジュ乗数を固定して部分問題を解く
 - 部分問題から得た解からラグランジュ乗数を更新

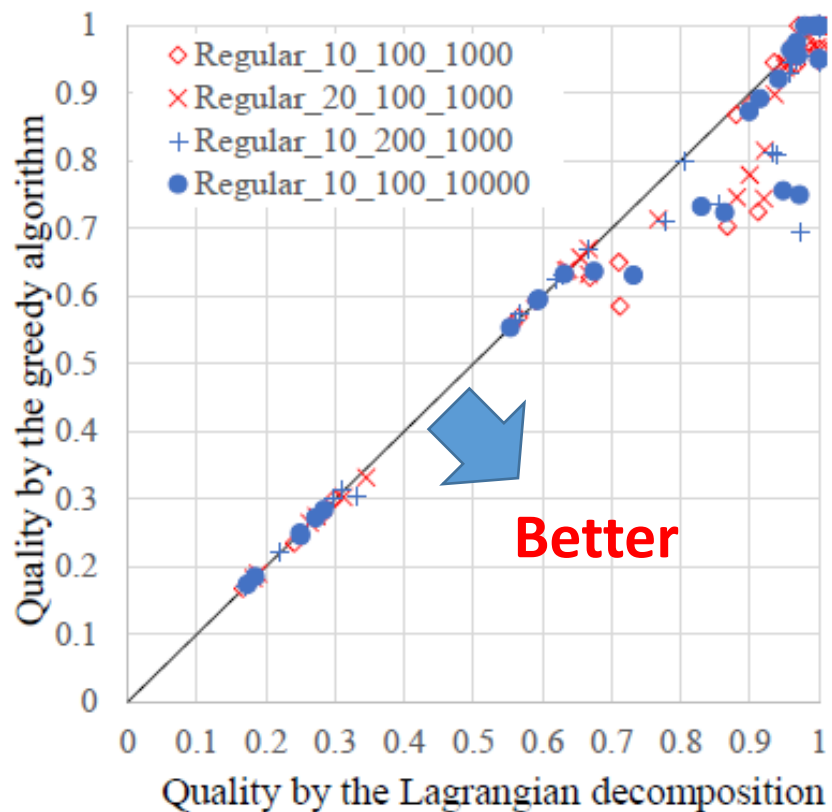
実験設定

- 解の質とスケーラビリティを評価
- アルゴリズム: 提案アルゴリズムと貪欲法との比較 (continuous greedy algorithmの代わりに)
- 実験設定
 - CentOS server with Intel Xeon E5-2670@2.6GHz and 512GB of memory
 - 2種類の2部グラフを用意. それぞれ枝の生成方法が異なる
 - **Regular graph:** 各広告媒体に3~5の顧客が存在
 - **Real dataset graph:** クエリークリック ログのデータセットであるopen-advertising dataset*¹を使用. 検索クエリと訪問したWEBサイトがそれぞれ広告媒体と顧客に対応

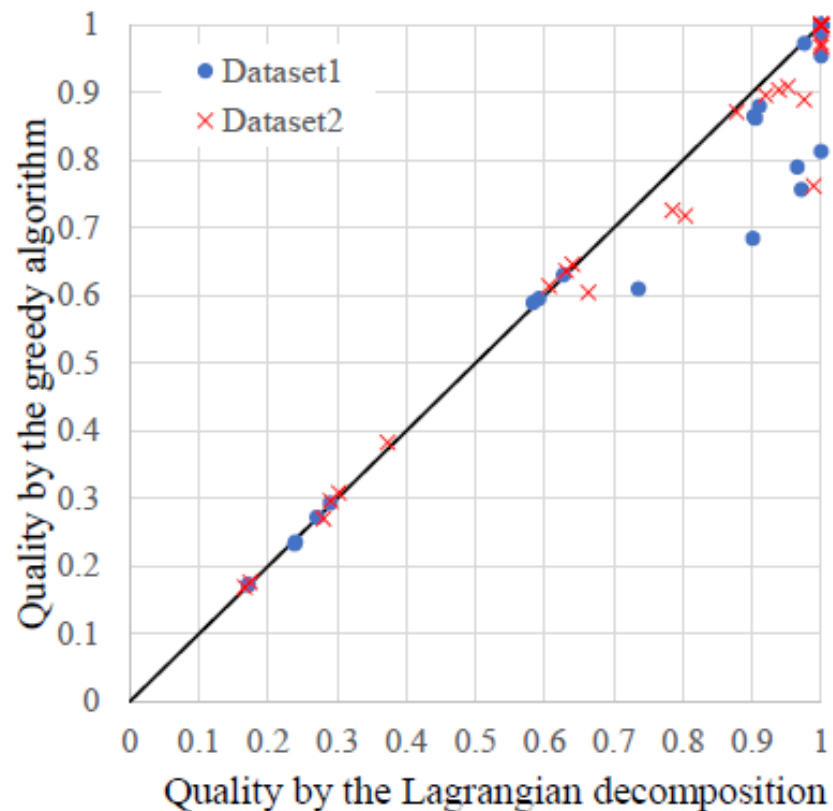
*1 <https://code.google.com/p/open-advertising-dataset/>

実験結果

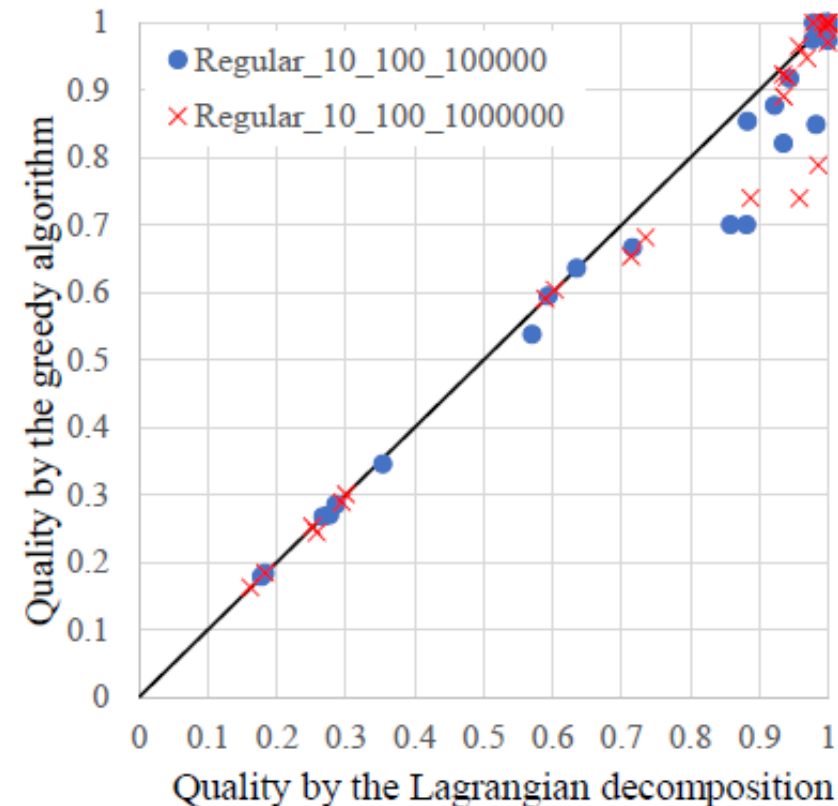
Regular



Dataset



Scalability



“Regular_10_100_10,000,000”の実験結果

	実行時間(sec)	解の質
提案アルゴリズム	186480	0.94
貪欲法	434247	0.92

まとめ

- 新しいモデルを提案
 - 複数の広告主が存在
 - 各広告主の目標影響度を設定
 - 各広告主に公平に広告枠を配分する: マッチメイカーの導入
- 提案解法: ラグランジュ分解に基づくアルゴリズム
 - 部分問題に分解可能 → 並列的に解くことが可能
 - 広告主の部分問題: 劣モジュラのようなもの → 貪欲法
 - マッチメイカーの部分問題: 貪欲法で最適化可能
- 実験結果
 - 既存アルゴリズムに対して最大で12%程度の改善